

Done  
10/10/19 #

Car by the Adwood













تقری مساوات







8/8/8  
9m7  
30/8



سلسلہ کتابیات اسلامیہ

# تقرنی مساواتیں

ایڈورڈ کے تکمیلی احصا کے آخری پانچ بابوں کا اردو ترجمہ  
از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے  
پروفیسر ریاضیات، کالج جامعہ عثمانیہ  
حیدرآباد دکن

۱۰۰-۱۰۱

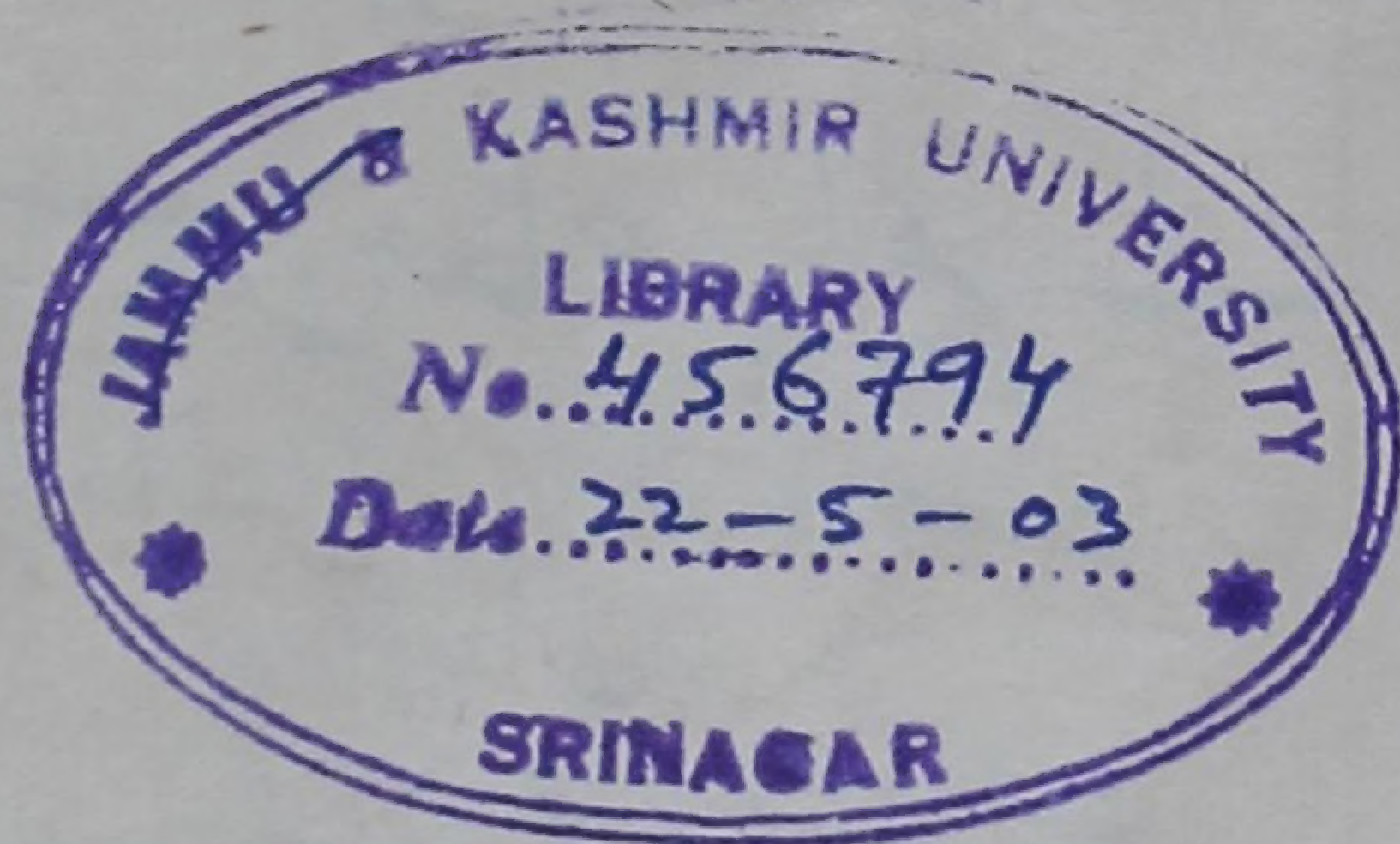
۱۳۴۱ھ ۱۳۴۲ھ ۱۹۲۳ء

دارالعلوم اسلامیہ



یہ کتاب سرس میلن کمپنی کی اجازت سے  
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں  
طبع کی گئی ہے۔

510  
959 ف





## مضامین

## تفرقی مساواتیں

| نمبر | مضمون  |
|------|--|
| ۱    | باب اول - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں               |
| ۲    | تفرقی مساوات کی تکنیکیں -                          |
| ۷    | متغیر جدائی پذیر                                   |
| ۱۳   | خطی مساواتیں                                       |
| ۲۱   | باب دوم - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں (سلسل)        |
| ۲۶   | متجانس مساواتیں                                    |
| ۳۲   | ایک حرف غائب                                       |
| ۳۴   | کلیروی صورت  |
| ۳۶   | باب سوم، رتبہ دوم کی مساواتیں، ٹھیک تفرقی مساواتیں |
| ۳۷   | خطی مساواتیں                                       |
| ۳۸   | ایک حرف غائب                                       |
| ۳۹   | خطی مساوات کی عام سے عام صورت، کسی ایک رقم کا      |
| ۴۰   | نکال دینا -  |
| ۴۱   | ٹھیک تفرقی مساواتیں                                |



|    |  |
|----|--|
| ۴۴ | باب چہارم۔ مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتیں                            |
| ۴۵ | متعلقہ عمل کی عام صورت   |
| ۵۶ | مستقل تفاعل<br>خاص تکمیلی  |
| ۶۳ | ایسی مساوات جو مستقل سروں والی خطی مساوات کی<br>شکل میں تحویل ہو سکتی ہے |
| ۶۶ | باب پنجم۔ قائم مری، متفرق مساواتیں                                       |
| ۸۱ | قائم مری   |
| ۸۳ | علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں   |
| ۹۲ | مزید توضیحی مثالیں<br>جوابات   |



# تفرقی مساواتیں

## باب اول

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

متغیر جدائی پذیر۔ خطی مساواتیں

- ۱۔ تکمیلی احصا کے اختتام پر چند معمولی قسم کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عام طریقوں کا سرسری ذکر کر دینا مقصود ہے، اس طرح کی مساواتیں طالب علم کو تحلیلی سکونیات، ذرہ کے علم حرکت اور استوار اجسام کے علم حرکت (کے ابتدائی حصوں) کے مطالعہ میں کارآمد ہوں گی۔
  - اس جگہ ہم ان تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کی مطلق کوشش نہیں کریں گے جن میں جزوی، تفرقی سر شامل ہوتے ہیں۔
  - ۲۔ تفرقی مساوات کی تکنیکیں
- ذرا سی دیر کے لئے ہم اس موضوع پر غور کریں گے کہ تفرقی مساوات کس طرح پیدا ہوتی ہے اور اس کے ”دھسل“ کی نوعیت کیا ہونی چاہئے۔



اس طرح کی مساوات

ف (لا، ما، ا) = ..... (۱)

جس میں تفاعل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لئے ا کی ایک خاص قیمت ہوگی جو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر یا تمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلوم قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلوم (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف ا تفاعل میں زیر بحث میں بطور ایک مستقل مقدار کے واقع نہیں ہونا چاہئے ورنہ پورے قبیل پر ایک یا کچھ عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک خاص رکن پر عمل کر رہے ہونگے۔ اس طرح ساقط ہو سکتا ہے۔

مساوات کو ا کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

ف (لا، ما) = ا ..... (۲)

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے ا نکل جاتا ہے اور (۱) کی بجائے ایک مساوات لا، ما اور ما میں حاصل ہوتی ہے۔ یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنانے میں ا کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

مساوات ف (لا، ما، ا) = ..... (۱)

کا بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جف ف} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dots (۳)$$



اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے  $\frac{لا}{لا}$  کو ساقد کرنے سے ایک ربط  
 $\frac{لا}{لا}$  حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔  
 مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات

میں اختیاری مستقل  $\frac{لا}{لا}$  کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{لا}{لا} = م$$

$$\frac{لا}{لا} = م$$

یا بطرز دیگر  $\frac{لا}{لا} = م$  کے لئے حل کرنے کے بغیر

$$\frac{لا}{لا} = م$$

اس لئے

یہ مساوات ان تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبدأ میں  
 سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبدأ میں سے  
 گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اس کے کسی نقطہ پر وہی ہے  
 جو اس نقطہ اور مبدأ کو ملائے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

$$ف(لا، ما، ا، ب) = ۰ \dots \dots (۱)$$

ہے جس میں دو اختیاری مستقل  $\frac{لا}{لا}$  ہیں اور قبیل کے مختلف  
 منحنی ان مستقلات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ بلحاظ  
 لاکس اوپر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے  $\frac{لا}{لا}$ ،  $\frac{ما}{ما}$ ،  $\frac{ا}{ا}$ ،  $\frac{ب}{ب}$   
 میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

$$ف(لا، ما، ا، ب) = ۰ \dots \dots (۲)$$



اگر ایک دفعہ اور لحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو  
لا، ما، ما، ما، ر، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کر دو کہ یہ حسب  
ذیل ہے

صہ (لا، ما، ما، ما، ر، ب) = ..... (۳)  
ان تین مساواتوں سے ر، ب ساقط ہو سکتے ہیں، کم از کم نظری لحاظ  
سے (اگر یہ پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے) اس طرح  
لا، ما، ما، ما، کو باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما، ما، ما، ر، ب) = .....  
حاصل ہوگا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔  
۴۔ مساوات کا رتبہ

تعریف کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ  
اس اعلیٰ ترین تفرقی سرے سے متعین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔  
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو مجہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیاری  
مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات  
حاصل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں  
ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔  
یہ استدلال بالکل عام ہے، ان اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے  
ہمیں ن دفعہ تفرق کرنا ہوگا اور اس طرح لا، ما، ما، ما، ..... ما، کو  
باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صیرج  
ن ہوگا۔

مثال ۱۔ مساوات لا + ما = ۲ لا + ج سے ر اور ج کو  
ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا + ما = ر

دوبارہ تفرق کرنے سے ۱ + ما + ما = ۰

صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسرا



رتبہ کی تفرقی مساوات ہے ( واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی مساوات سراسر میں  
ماہ ہے ) جو اُن تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر  
واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ اُن تمام مرکزدار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم  
کرو جن کے محور محدودوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔  
مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

$$لا + ب = ما = ا$$

تفرق کرنے سے  $لا + ب = ما = ا$

دوبارہ تفرق کرنے سے  $ا + ب = (ما + ما) =$

جس سے  $لا (ما + ما) = ما =$

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۵۔ عمل استقاط الٹ نہیں سکتا۔

بالعموم اوپر کا عمل استقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی  
تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی  
مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل استقام کی طرح چند معیاری صورتوں  
سے کام لے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں  
جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے۔

تاہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ  
کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، ما اور ن اختیاری  
مستقلات میں ایک ایسا جبر یہ ربط معلوم کرنا چاہیے کہ ان مستقلات  
کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے۔ ایسا جبر یہ  
ربط مساوات کا عام سے عام حل خیال کیا جاتا ہے۔



## پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۶۔ انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں  
صورت اول۔ متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا والی تمام رتھیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما والی تمام رتھیں دوسری طرف لائی جائیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمیل کرنے سے فوراً حل ہو سکتی ہیں

مثال ۱۔ مثلاً اگر  $\text{قط ما} = \text{قط لا}$  فر ما

تو  $\text{جھم لا فر لا} = \text{جھم ما فر ما}$   
تکمیل کرنے سے ربط جب لا = جب ما + ۱  
حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

مثال ۲۔ اگر  $\frac{\text{لا} + ۱}{\text{ما} + ۱} = \text{لا ما فر لا}$

تو  $(\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ما}}) \text{فر لا} = (\frac{۱}{\text{ما}} + \frac{۱}{\text{لا}}) \text{فر ما}$

اس لئے  $\frac{\text{لا}^۲}{\text{پ}} + \text{لوک لا} = \frac{\text{ما}^۲}{\text{پ}} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{پ}} + ۱$   
جس میں ایک اختیاری مستقل لا شامل ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو  
۱۔ لا جھم ما فر لا = ما جھم لا فر ما



$$۲ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱}{۱ + \text{ما} + \text{لا}} - ۳ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}^۲ + \text{ما} + ۱}{\text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱} = ۰$$

۴۔ ثابت کرو کہ مثال ۳ کے قبیل منحنیات کا ہر ایک رکن مثال ۲ کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

$$۵ - \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} + ۱}{\text{لا} + ۱} (۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲)$$

$$۶ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} + ۱} + \frac{\text{لا}^۲ - ۱}{\text{لا} + ۱}$$

۷۔ ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زائد۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کا ماس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عہ) بنائے صرف اس حالت میں ممکن ہے۔

۹۔ اُن منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(۱) کارٹیشی زیر ماس مستقل ہو

(۲) کارٹیشی زیر عماد مستقل ہو

(۳) قطبی زیر ماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

۱۰۔ اُس منحنی کی کارٹیشی مساوات معلوم کرو جس کے ماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم۔ خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

$$\text{ما} + \text{ق} + \text{ق}^۲ + \dots + \text{ک} + \text{ما} = \text{ر}$$



جہاں 'ف'، 'ق'، 'ک'، 'ر' متغیر لا کے تفاعل یا مستقل مقدر ہیں  
 ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے  
 کہ اس میں تفرقی سروں کی ایک سے بڑی قوت شریک نہیں ہوتی  
 فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے  
 ہیں اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

$$با + ف = ق$$

اگر اس کے دونوں جانب کو 'ف' سے ضرب دیدیا جائے  
 تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{ق}{ف} = (با کو ف سے ضرب دیا)$$

$$پس با کو ف سے ضرب دیا = ق کو ف سے ضرب دیا + ف$$

یہ 'لا' کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں ایک  
 اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی کو 'ف' کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات

کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے  
 "شکل جزو ضربی" کہتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔ } با + ف = ق \text{ کو مکمل کرو۔}$$

شکل جزو ضربی یہاں کو 'ف' سے ضرب دیا یا  $\frac{ق}{ف}$  ہے اور اس لئے مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{ق}{ف} = (با کو ف سے ضرب دیا)$$

$$\text{یا } با کو ف سے ضرب دیا = ق کو ف سے ضرب دیا + ف$$



$$\frac{2y}{2}$$

$$م = ۱ + ۱ - ۱$$

$$\text{مثال ۲-} \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱}{لا} = م = لا کو تکمل کرو۔$$

اس جگہ تکمل جزو ضربی ہوگا  $\frac{۱}{فرلا} = ۱$  ہوگا  $لا = لا$  ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے  $\frac{فرما}{فرلا} (لا م) = لا$

$$\text{اور } لا م = \frac{لا}{۱} + ۱ \text{ یا } م = \frac{لا}{۱} + \frac{۱}{لا}$$

۸۔ ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{فرما}{فرلا} + ف م = ق$$

کی نہ ہوں متغیروں کو بدلنے سے فوراً اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں۔  
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{فرما}{فرلا} + ف م = ق م$$

$$\text{یا } م - \frac{فرما}{فرلا} + ف م = ۱ + ۱ = ق$$

$$\text{رکھو } م - ۱ = ی$$

$$\text{تو } م - ۱ = فرما = \frac{فری}{۱ - ن}$$

$$\text{یا } \frac{فری}{فرلا} + (۱ - ن) ف ی = ق (۱ - ن)$$



جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے  
 $y = (1-n)k + (1-n)k + 1$

یعنی  $y = (1-n)k + (1-n)k + 1$

مثال ۱۔  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  کو تکمیل کرو

یہاں  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$

یا  $\frac{1}{x} = 1$  سے

$\frac{1}{x} = 1$

اور چونکہ مشکل جزو ضربی ہو گا  $\frac{1}{x} = 1$  کو  $x = 1$  سے

اس لئے  $\frac{1}{x} = 1$

یعنی  $\frac{1}{x} = 1$  کو  $x = 1$

یعنی  $\frac{1}{x} = 1$  کو  $x = 1$

مثال ۲۔ مساوات  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  کو تکمیل کرو

قطعاً  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  کو  $x = 1$  سے



$$\text{تب } \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \text{لا}^2 \text{ می} = \text{لا}^3$$

شکل جزو ضربی کو  $\text{لا}^2 \text{ فرلا}$  ہے اس لئے

$$\text{می} \text{ فرلا}^2 = \text{فرلا}^3 \text{ فرلا} + 1$$

فرض کرو کہ  $\text{لا}^2 = \text{سم}$

تب  $\text{لا}^2 \text{ فرلا} = \text{فرسم}$

$$\text{پس } \text{فرلا}^3 \text{ فرلا} = \frac{1}{\text{فرلا}} \text{ فرسم فرسم}$$

$$= \frac{1}{\text{فرلا}} \text{ فرسم} (\text{سم} - 1)$$

$$\text{پس } \text{سم} \times \text{فرلا}^2 = \frac{1}{\text{فرلا}} \text{ فرلا}^2 (\text{سم} - 1) + 1$$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔  
ظاہر ہے کہ اس تقسیم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت میں لانے کے لئے بیڑی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو مکمل کرو

$$1 - (1 + \text{لا}^2) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{فرسم}^2 \text{الا} - 2 - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{جب ب لا}$$

$$3 - \frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}} + \frac{\text{لا}}{\text{ط}} = \text{لا ط ب} - 4 - \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{ما}^2$$

$$5 - (1 + \text{ما}^2) + (\text{لا} - \text{فرلا}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0 - 6 - (\frac{\text{ما}}{\text{الا}} - \frac{\text{فرلا}}{\text{الا}}) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = 1$$



۷۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۷ کے حل میں کوئی زیادہ عمومیت پیدا نہیں ہوتی اگر متکمل جزو ضربی و مرکب فرلا کے حاصل کرنے میں قوت نما کے ساتھ ایک مستقل کا اضافہ کر دیا جائے۔

۸۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن میں کارٹیشیائی زیر عماد ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کا مربع۔  
ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو

$$9 - \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{1}{فرلا} + \frac{فرلا}{فرلا} \quad 10 - \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{1}{فرلا} + \frac{فرلا}{فرلا}$$

$$11 - \frac{فرلا}{فرلا} = فرلا + لا مان$$

$$12 - \frac{فرلا}{فرلا} + \frac{1}{فرلا} مس ما = \frac{1}{فرلا} مس ما [رکھو ما = جبٹای]$$

$$13 - \frac{فرلا}{فرلا} + \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{فرلا}{فرلا} (لوک ی) [رکھو ی = فو ۲]$$

$$14 - \frac{فرلا}{فرلا} + لا = فو (۱-۵) ی [رکھو ی = لوک ما]$$

۱۵۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن کے سمتی نیم قطر اور قطبی زیر حماس کے متکافوں کا مجموعہ مستقل ہو۔

۱۶۔ ایسے منحنیات کے قبیل کی قطبی مساوات معلوم کرو جن میں سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کا مجموعہ ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کی ن ویں قوت۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایسے منحنی جن میں انحناء کا نیم قطر ایسے بدلتا ہو جیسے عماد پر کے عمود کا مربع ایک ایسی جماعت سے تعلق رکھتے ہیں جس کی پائیں مساوات  $لا - ع = ع + \frac{1}{ع} + \frac{1}{ع} + فو ۲ ع$



ہے جہاں ک ایک معلومہ اور  $\lambda$  اختیاری مستقل ہے۔  
۱۸۔ ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{لا} + \frac{فرما}{فرلا} \quad (۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} = ۱ + \frac{فرما}{فرلا} = قو جب ب لا$$

$$(۳) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{مس ما}{لا + ۱} = (لا + ۱) قو ق ط ما$$

$$(۴) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{ن دما}{ق دما} = ق د لا ق د لا = \frac{ق د لا ق د لا}{ق د لا}$$





# باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (سلسلہ)  
متجانس مساواتیں - ایک حرف غائب  
کلیدی صورت

۹- صورت سوم - متجانس مساواتیں -  
جو مساواتیں لا، ما میں متجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$\text{لا} \left( \frac{\text{ما}}{\text{فر لا}} \right) =$$

(۱) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو  $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$  کے لئے  
حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{فہ} \left( \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \right)$$

اس میں رکھو ما = ولا

$$\text{تو حاصل ہوگا } \text{ولا} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} = \text{فہ (و)}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فر و}}{\text{فہ (و)}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}}$$

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کا حل صورت اول کی



تحت میں آجاتا ہے۔

$$\text{پس } \text{لوک } ۱ = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱ - ۱} = ۱$$

(ب) لیکن اگر  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱}$  کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو مساوات کو  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱}$  کے لئے حل کرنا چاہئے، اس طرح  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱}$  کے لئے ع رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{لا} - \text{فر } ۱ \quad (۱) \dots\dots\dots$$

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = \text{فر } ۱ - \text{فر } ۱ + \text{فر } ۱ = \text{فر } ۱$$

$$\text{فر } ۱ = \frac{\text{فر } ۱ - \text{فر } ۱}{\text{فر } ۱ - \text{فر } ۱}$$

اس مساوات کو تکمیل کرنے سے ہم لا کو ع کے تفاعل اور ایک اختیاری مستقل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں

یعنی  $\text{لا} = \text{فر } ۱ - \text{فر } ۱$  فرض کرو  $\dots\dots\dots (۲)$   
ع کو ان مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنے سے حل مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔} \quad (\text{لا} + \text{ما}) = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} = \text{لا}$$

$$\text{یہاں } \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} = \frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

اور  $\text{ما} = \text{لا} - \text{فر } ۱$  رکھنے سے

$$\text{لا} = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} + \text{فر } ۱ = \frac{\text{فر } ۱}{\text{فر } ۱} + ۱$$



$$\text{یا لا فرد} = \frac{3}{2+1}$$

$$\text{یا لا فرد} = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \text{ فرد}$$

$$\text{یا لوک لا} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ لوک و}$$

$$\text{یا لا} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲ - فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{یعنی } 1 = 2 + 1$$

$$\text{تب } 1 = 2 + 1 \text{ لا } (2+1) \text{ فرد}$$

$$\text{یا لا} = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ فرد}$$

$$\text{جس سے حاصل ہوتا ہے لوک لا} + 2 \text{ لوک } 1 = \frac{1}{2} \text{ یعنی لا } 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 1 = 2 + 1 \\ 1 = 2 + 1 \end{cases}$$

اور

کام حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

$$\text{یہ حال استقاط ہے لوک } \left\{ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

لیکن اگر چہ یہ طریق پر ع کو سا ققط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر سا ققط کرنے پر ایک بے ڈھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع والی ان مساواتوں



کو بغیر بدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں، اور انہیں ایسی ہی مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا ع حاصل استقاط تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے۔

### امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$1 - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا}{لا+ما} \quad 2 - (ما+لا) = (ما+لا) \frac{فرما}{فرلا}$$

$$3 - لا^2 \frac{فرما}{فرلا} = ما^2 \quad 4 - ما = لا \left[ \frac{فرما}{فرلا} + \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^2 \right]$$

$$5 - ما = لا \left\{ 1 + \left( \frac{فرما}{فرلا} \right) + \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^2 + \dots \right\}$$

۱۰۔ خاص صورت

$$\text{مساوات} \quad \frac{لا+ب+ما+ج}{لا+ب+ما+ج} = \frac{فرما}{فرلا} \quad \text{آسانی متجانس شکل میں}$$

اس طرح لائی جاسکتی ہے

$$\text{اس میں رکھو} \quad \begin{cases} لا = ضا + ه \\ ما = عا + ک \end{cases} \quad \text{جہاں ضا، عا متغیر ہیں اور} \\ \text{ه، ک مستقل۔}$$

$$\text{تب} \quad \frac{رضا+ب+عا+(ا+ه+ب+ک+ج)}{رضا+ب+عا+(ا+ه+ب+ک+ج)} = \frac{فرعا}{فرضا}$$

$$\text{اب ه، ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ} \quad \begin{aligned} ا+ه+ب+ک+ج &= 0 \\ ا+ه+ب+ک+ج &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{پس} \quad \frac{ب+ج-ب+ج}{ب+ج-ب+ج} = \frac{ک}{ج-ج-ا} = \frac{ا}{ا+ب-ا}$$



$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرضاً}} = \frac{\text{و ضاً} + \text{ب عاً}}{\text{و ضاً} + \text{ب عاً}}$$

یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں  $\text{عاً} = \text{و ضاً}$  اور متغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔  
۱۱۔ لیکن ایک صورت میں  $\text{عاً}$  ک اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

$$\text{یعنی جبکہ} \quad \frac{1}{\text{و}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

اس صورت میں فرض کرو کہ  $\frac{1}{\text{و}} = \text{م اور لا} + \text{ب ما} = \text{عاً}$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرماً}}{\text{فرلاً}} = \frac{1}{\text{ب}} \left( \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} - 1 \right)$$

$$\text{پس} \quad \left( \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} - 1 \right) = \frac{\text{ب عاً} + \text{ج}}{\text{م عاً} + \text{ج}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلاً}} = \frac{(\text{و م} + \text{ب عاً} + \text{و ج} + \text{ب ج})}{\text{م عاً} + \text{ج}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فرلاً}}{\text{فرعاً}} = \frac{\text{م عاً} + \text{ج}}{(\text{و م} + \text{ب عاً} + \text{و ج} + \text{ب ج})}$$

متغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا مکمل عمل میں آ سکتا ہے۔  
۱۲۔ ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرماً}}{\text{فرلاً}} = \frac{\text{و لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{\text{ب لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}$$

جہاں شمار کنندہ میں  $\text{ما}$  کا سر نسب نامہ لا کے سر کے مساوی اور مختلف العلامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے  
(و لا + ج) فرلاً + ب (ما فرلاً + لا فرماً) = (ب ما + ج) فرماً







مثال ۲۔ تکمیل کرو  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + با}{۱ - با + لا}$  کو  
فرض کرو کہ  $لا + با = سی$ ، تب

$$\frac{فری}{فرلا} = ۱ + \frac{سی}{۱ - سی} = \frac{۱ - سی}{۱ - سی}$$

اور  $فرلا = \frac{۱ - سی}{۱ - سی}$   $فری = \frac{۱}{۲} [۱ - \frac{۱}{سی - ۱}]$   $فری$

$$لا = \frac{۱}{۲} سی - \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (سی - ۱) + ۱$$

$$جہاں سی = لا + با$$

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو۔

$$۱ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۲ + با ۳}{۳ - لا ۲ + با ۳} \quad ۲ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۲ + با ۳}{۳ - لا ۲ + با ۳}$$

$$۳ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۲ + با ۳}{۳ - لا ۲ + با ۳} \quad ۴ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا ۲ + با ۳}{۳ - لا ۲ + با ۳}$$

$$۵ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + با + ۱}{۱ - لا + با + ۱} \quad ۶ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + با + ۱}{۱ - لا + با + ۱}$$

$$۷ - (لا ۲ + با ۳ - ۵) \frac{فرما}{فرلا} + لا ۳ + با ۲ - ۵ = ۰$$

$$۸ - (لا ۲ + با ۳ - ۵) \frac{فرما}{فرلا} + لا ۲ + با ۳ - ۱ = ۰$$

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ لا، با جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{فرما}{فرت} = لا + با + گ$$



$$\frac{لا}{ف} = - (ص لا + ب ما + ف)$$

ہمیشہ ایک مخروطی تراش پر واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ عام متجانس مساوات  $ف ( \frac{ما}{لا} , \frac{لا}{ما} ) = ۰$  کے حل ہمیشہ متشابہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ  $ف ( \frac{ما}{لا} , \frac{لا}{ما} ) = ۰$  کے حل 'لا' 'ما' اور

ایک مستقل کی کسی خاص قوت میں متجانس ہیں۔ برعکس اس کے اگر ایک قبیل منحنیات کے کسی رکن کی نمونہ کی مساوات 'لا' 'ما' اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت کے لحاظ سے متجانس ہو تو اس قبیل کی تفرقی مساوات بھی متجانس ہوگی اور قبیل کے منحنی سب ایک دوسرے کے متشابہ ہوں گے۔

۱۲۔ بتاؤ کہ 'ب' کی مختلف قیمتوں کے لئے منحنیات کے قبائل ذیل میں سے کون کون سے متشابہ جڑوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$(۱) ما^۲ = ۴ لا \quad (۲) ما = ۱ جمر \frac{لا}{۲}$$

$$(۳) \frac{لا}{۲} + \frac{ما^۲}{ب} = ۱ \quad (۴) ما^۲ = ۲ لا + ۳ لوک \frac{لا}{۳}$$

$$(۵) ب مس = \frac{ما}{لا} = ۱ + ما \quad (۶) لا^۳ + ما^۳ = ۳ لا ما$$

۱۳۔ صورت چہارم۔ ایک حرف غائب

لا غائب

(۱) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں لا موجود نہیں ہے، اس صورت



میں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف (ما، \frac{فرما}{فرلا}) =$$

اسے ہم  $\frac{فرما}{فرلا}$  یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر  $\frac{فرما}{فرلا}$  کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فرما}{فرلا} = ف (ما)$$

$$تب \quad فرلا = ف (ما)$$

$$اور مکملی ہے لا = ۱ + \frac{فرما}{ف (ما)}$$

(۲) اگر  $\frac{فرما}{فرلا}$  کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا ما = ف (ع)

جہاں ع تفرقی سر  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بمطابق لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرق کرنے سے

$$ع = ف (ع) \frac{فرع}{فرلا}$$

$$یعنی \quad فرلا = \frac{ف (ع) فرع}{ع}$$

$$پس \quad لا = ۱ + \frac{ف (ع) فرع}{ع}$$



مکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم ع کو اس مساوات اور ما = فہ (ع) سے سا قی کر رہے ہیں، اس طرح مساوات مفروضہ کا حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں ما موجود نہیں ہے،

اس صورت میں اس کی شکل ہوگی ف (لا،  $\frac{ما}{لا}$ ) = ۰۔

چونکہ  $\frac{ما}{لا} = \frac{۱}{\frac{لا}{ما}}$  اس لئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی

جاسکتی ہے سا (لا،  $\frac{ما}{لا}$ ) = ۰۔

پس اگر ما کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح -

(۱) بشرط سہولت  $\frac{ما}{لا}$  کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ما}{لا} = فہ (لا)$$

$$تب \quad ما = \frac{ما}{\frac{لا}{فہ (لا)}}$$

$$اور مکملی ہے ما = کر + \frac{ما}{فہ (لا)} + ۱$$

(۲) لیکن اگر  $\frac{ما}{لا}$  کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو



لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں  $لا = فہ (ق)$   
 جہاں  $ق = \frac{مر لا}{مر ما}$  کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات  
 میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$ق = فہ (ق) \frac{مر ما}{مر ما}$$

اس طرح  $مر ما = \frac{فہ (ق)}{ق}$  مر ق

$$اور ما = \frac{ق فہ (ق)}{ق} مر ق + ۱$$

تکمیل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں  $ق$  کو اس مساوات اور  $لا = فہ (ق)$   
 سے ساقط کرنا چاہئے، اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب  
 حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ  $لا$  موجود نہ ہو  
 یا  $ما$  ہم حتی الامکان سب سے پہلے  $\frac{مر ما}{مر لا}$  کے لئے حل کرنے کی  
 کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی  
 ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ  
 سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس  
 ہر صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے  
 متغیر متبوع خیال کیا جاتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ مساوات } ۱ + لا^۲ - لا \frac{مر ما}{مر لا} = ۰ \text{ کو تکمیل کرو}$$

$$\text{اسجگہ } \frac{مر لا}{مر ما} = \frac{لا}{۱ + لا} \text{ یعنی } مر ما = (لا + \frac{۱}{لا}) مر لا$$



اور  $ما = \frac{لا^2}{۲} + لوک لا + ۱$  حل مطلوب ہے

مثال ۲ - حل کرو  $لا = \frac{ما}{۲}$   $۱ + (\frac{ما}{۲}) = کو$  -  
مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$لا = ق + \frac{۱}{ق}$  جہاں  $ق = \frac{ما}{۲}$   
یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے لحاظ سے تفرق کرتے سے

$$ق = (۱ - \frac{۱}{ق}) \frac{ما}{۲}$$

$$یا \frac{ما}{۲ق} = \frac{۱}{ق} - \frac{۱}{۳ق}$$

$$اور ما = لوک ق + \frac{۱}{۲ق} + ۱$$

اس مساوات اور مساوات  $لا = ق + \frac{۱}{ق}$  کا  
ق، حاصل استقاط حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$۱ - \frac{ما}{۲لا} = ما + \frac{۱}{۲} \quad ۲ - \frac{ما}{۲لا} = لا + \frac{۱}{۲}$$

$$۳ - \sqrt{لا + ۱} = \frac{ما}{۲لا} + لا = ۰$$

$$۴ - (۱۲ لا + لا^۲) = \frac{ما}{۲لا} = ۱ + ۱۲ لا$$



$$۵۔ (۱ + ۱۲ + ۱) = \frac{۱۲}{۱۲} = ۱ + ۱۲ + ۱$$

$$۶۔ ۱ = جب (۱) - \frac{۱}{۱۲} = جم (۱) \frac{۱}{۱۲}$$

$$۷۔ ۱ = ۱ + ۲ (۱) + ۳ (۱) \frac{۱}{۱۲}$$

$$۸۔ لا (۱) = ۱ + ۲ + ۳ \frac{۱}{۱۲}$$

$$۱۵۔ صورت پنجم۔ کلیدی صورت ۱ = لا \frac{۱}{۱۲} + ف (۱) \frac{۱}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{۱۲} کے لئے ع لکھنے سے$$

$$۱ = ع + لا + ف (ع) \dots \dots \dots (۱)$$

بحفاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$ع = ع + لا \frac{ع}{۱۲} + ف (ع) \frac{ع}{۱۲}$$

$$یا \{ لا + ف (ع) \} \frac{ع}{۱۲} = \dots \dots \dots (۲)$$

$$جس سے \frac{ع}{۱۲} = یا لا + ف (ع) =$$

$$اب \frac{ع}{۱۲} = سے حاصل ہوتا ہے ع = ج جہاں ج مستقل ہے$$

$$پس ۱ = ج + لا + ف (ج) تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔$$

نیز اگر ع کو مساوات



لا + فا (ع) = ..... (۳) لا کا ایک تفاعل ہوگا  
 سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جائے تو ع ، لا کا ایک تفاعل ہوگا  
 اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو  
 ایک ہی بات ہے کہ ع کو مساواتوں (۱) اور (۳) سے ساقط کیا  
 جائے تو ہمیں لا ، ما میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفرقی  
 مساوات کو پورا کرے گا۔  
 اب ع کو مساواتوں

$$ما = ع لا + فا (ع)$$

$$= لا + فا (ع)$$

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

$$ما = ج لا + فا (ج)$$

$$= لا + فا (ج)$$

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط

ما = ج لا + فا (ج) کا لفافہ معلوم کیا جائے۔

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔  
 (۱) خطی حل جسے ”کامل ابتدائی“ کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیار  
 مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لفافہ یا ”نادر حل“ جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل

نہیں ہوتا اور نیز یہ حل کامل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ

کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔

ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی

خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور نادر حل ان کے

لفافہ کو۔ نادر حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر

ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ

کرے۔



مثال - حل کرو  $ما = ع لا + \frac{1}{ع}$

کلیریوی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

$$ما = م لا + \frac{1}{م}$$

لغات یا تادر حل اوپر کی مساوات اور

$$= لا - \frac{1}{م}$$

کے درمیان م کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا۔

تادر حل ہے  $ما = م لا$

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ تادر حل  $ما = م لا$

مکافی کی مساوات ہے اور کامل ابتدائی  $ما = م لا + \frac{1}{م}$

مکافی کے محاس کی مساوات ہے۔

امثلہ

ذیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لغاتی حل معلوم کرو

$$۱ - ما = ع لا + ع^۲$$

$$۲ - ما = ع لا + ع^۳$$

$$۳ - ما = ع لا + ع^۴$$

$$۴ - ما = ع لا + ع^۵ + ع^۶$$

$$۵ - ما = (لا - ع) (ع - ع^۲)$$

$$۶ - مساوات ما = لا فہ (ع) + ساد (ع) ..... (۱)$$

بھی پہلے بلحاظ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال کرنے سے حل ہو سکتی ہے۔

تفرق کرنے سے



$$ع = فہ (ع) + لا فہ (ع) + ساد (ع) \quad \text{فر لا} \quad \text{فر ع}$$

$$\text{جس سے} \quad \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ع}} + \frac{\text{لا فہ (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}} = \frac{\text{ساد (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}}$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$\text{لا} \quad \frac{\text{فہ (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}} = \frac{\text{ساد (ع)}}{\text{فہ (ع) - ع}} \quad \text{و کلا فہ (ع) - ع} \quad \text{فر ع} + 1$$

(۲).....

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا کامل ابتدائی حاصل ہوگا۔

$$\text{مثال حل کرو} \quad ۲ع + لا ۲ = ۱۰ \quad \text{..... (۱)}$$

$$\text{تفرق کرنے سے} \quad ع = ۲ + لا ۲ \quad \text{فر لا} \quad \text{فر ع}$$

$$\text{یا} \quad ع = ۲ + \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ع}} \quad \text{لا ۲} = ۲ - ع$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فر ع}}{\text{فر ع}} (ع لا) = ۲ - ع$$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $ع لا = ۲ - ع$  ..... (۲)  
ان مساواتوں کا ع، حاصل استقاط اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کر پھر (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عمل کرو

$$\text{مساوات (۲) سے} \quad ۲ع + لا ۳ = ۱۰$$

$$(۱) \text{ سے} \quad ۲ع + لا ۲ = ۱۰$$

$$\text{اس لئے} \quad ۲ع لا = ۲ع لا - ۱۰ = ۱۰$$

$$\text{اس مساوات اور} \quad ۲ع + لا ۲ = ۱۰ \quad \text{سے چھپی ضرب کے}$$



ذریعہ

$$\frac{1}{62 + 2^2} = \frac{ع}{13 - 12} = \frac{ع^2}{12 + 4 + 2^2}$$

جس سے حاصل استقاط ہے  $2(12 + 13 - 12) = (12 + 2^2)(13 - 12)$   
 ۱۷۔ ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں استقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمنژاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع حاصل استقاط مساوات زیر بحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

مثلاً

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$2 - 1 = 62 + 2^2$$

$$1 - 1 = 12 + 2^2$$

$$2 - 2 = 62 + 2^2$$

$$3 - 1 = 12 + 2^2$$

$$5 - 1 = 62 + 2^2$$

$$6 - 1 = 12 + 2^2$$

۸۔ ایک سختی کے نقطہ ن پر کاماس محور و ما سے ت پر ملتا ہے اور و ت اس زاویہ میلان کے مماس کے متناسب ہے جو ن ت کا ولا کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ ۱۸۸۸ء]  
 ۹۔ جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر ان کے مماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے مماس کی مساوات اور نادر حل سے منحنیات زیر بحث کی مساوات معلوم کرو۔



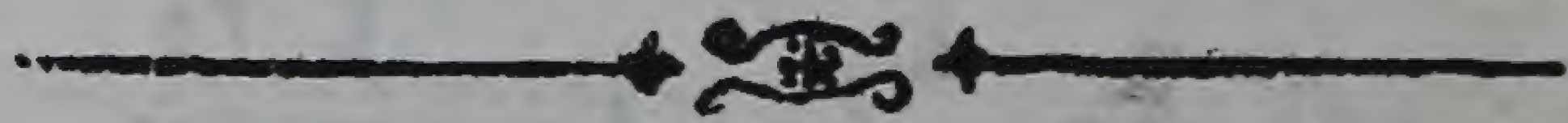
- ۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اس مثلث کا رقبہ جو حماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتا ہے مستقل ہو۔
- ۱۱۔ جن منحنیات میں حماس کے اس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہو ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو، کامل ابتدائی اور نادر حل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر تیار کرو۔
- ۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات  $ما = ع' (لا - ع)$  کو پورا کرتا ہے، نیز اگر  $لا = \frac{1}{p} تو ع = ما$  منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۸۹ء]
- ۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو

$$قو^3 (ما - \frac{قو}{لا}) = ج \{ قو^2 + (\frac{قو}{لا})^2 \} [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر  $لا^2 = س$  اور  $ما^2 = ت$  تو مساوات ذیل

$$لا لا ما ما + (لا^2 - ما^2) (ب - ما) = لا ما =$$

کلیروی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔  
اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔





# باب سوم

## دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

### ٹھیک یا حاضری تفرقی مساواتیں

۱۸۔ دوسرے رتبہ کی مساوات

اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے

فہ (لا، ما، مام، مام) =

اس کے حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹۔ صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی  $\frac{2}{3} \text{فہ} + \frac{1}{4} \text{ف} + \frac{1}{5} \text{ق} = \text{ر}$

جہاں ف، ق، ر متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے ر کو حذف کر کے مساوات

$\frac{2}{3} \text{فہ} + \frac{1}{4} \text{ف} + \frac{1}{5} \text{ق} = \text{ما}$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی بھانپ لیا جائے۔

فرض کرو کہ  $\text{ما} = \text{فہ} (لا)$  اس کا ایک حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو

$\text{ما} = \text{ما} \text{فہ} (لا)$

$\text{ما} = \text{ما} \text{فہ} (لا) + \text{ما} \text{فہ} (لا)$



$$م = م_1 ف (لا) + م_2 ف (لا) + م_3 ف (لا)$$

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$م_1 ف (لا) + م_2 ف (لا) + م_3 ف (لا)$$

$$+ م_4 ف (لا) + م_5 ف (لا)$$

$$+ م_6 ف (لا) = ل$$

$$\text{لیکن } ف (لا) + م_1 ف (لا) + م_2 ف (لا) = \text{حسب مفروض}$$

$$\text{اس لئے } م_1 + \left\{ \frac{م_2 ف (لا)}{ف (لا)} + م_3 \right\} = \frac{ل}{ف (لا)}$$

جو م کے لئے خطی مساوات ہے

تکمل جزو ضربی ہے

$$\text{م } \left\{ \frac{م_2 ف (لا)}{ف (لا)} + م_3 \right\} \text{ یا } [ف (لا)] \text{ کو } م \text{ مولا}$$

اور پہلا تکملی ہے

$$م_1 \{ ف (لا) \} \text{ کو } م \text{ مولا} = م_2 \{ ف (لا) \} \text{ کو } م \text{ مولا} + ل$$

جس سے دوسرا تکملی اور اس لئے تفرقی مساوات کا حل حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{مثال - اس مساوات کو حل کرو } \frac{م_1}{لا} + \frac{م_2}{لا} - \frac{م_3}{لا} = لا \text{ مولا}$$

$$\text{یہاں } م = لا \text{ مساوات } \frac{م_1}{لا} + \frac{م_2}{لا} - \frac{م_3}{لا} = لا \text{ مولا} \text{ کا ایک حل ہے}$$

اس لئے رکھو  $م = لا$

$$\text{تب } م = لا + م_1 + م_2$$

$$\text{اور } م = لا + م_1 + م_2 + م_3$$

$$\text{اس لئے } لا + م_1 + م_2 + م_3 + لا (لا + م_1 + م_2 + م_3) = لا \text{ مولا}$$



$$م = \left( \frac{۲}{لا} + لا^۳ \right) م = لا^۲ مو - \frac{لا^۴}{۳}$$

اور مکمل جزو ضربی ہے  $مو ( \frac{۲}{لا} + لا^۳ )$  یا  $لا^۲ مو - \frac{لا^۴}{۳}$

$$\text{پس } \frac{مو}{لا} (م) لا^۲ مو = لا^۴$$

$$\text{اور } م لا^۲ مو = \frac{لا^۴}{۳} + ۱$$

$$\text{یعنی } م = \frac{۱}{۵} لا^۳ مو - \frac{لا^۴}{۳} + \frac{۱}{لا} مو - \frac{لا^۴}{۳}$$

$$\text{جس سے } م = -\frac{۱}{۵} مو - \frac{لا^۴}{۳} + ۱ م لا^۲ مو - \frac{لا^۴}{۳} + م$$

$$\text{اور حل مطلوب ہے } م = -\frac{لا}{۵} مو - \frac{لا^۴}{۳} + ۱ م لا^۲ مو - \frac{لا^۴}{۳} + م$$

۲۰۔ صورت دوم۔ ایک حرف غائب  
(۱) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ  $ما = ع$

$$\text{تب } ۲ = \frac{مرع}{مرلا} = ع = \frac{مرع}{مرما}$$

اس طرح مساوات  $ف (ما، ما، ما) = ۰$  ہو جاتی ہے

$$ف (ما، ع، ع) = \frac{مرع}{مرما} = ۰$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

(۲) اگر ما موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ  $ما = ع$



$$\text{تب } \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} = \text{ما}^2$$

اور فہ (لا، ما، ما) = ہو جاتی ہے

$$\text{فہ (لا، ع، فرع)} = \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} =$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ مساوات ما<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> = ۲ ما کو حل کرو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے، پس رکھو ما = ع اور ما = ع فرع

$$\text{اس طرح } \text{ما}^2 = \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} + \text{ع}^2 = ۲ \text{ ما}^2$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} + \frac{۲}{\text{ما}} = \text{ع}^2 = ۲ \text{ ما}^2$$

تشکیل جزو ضربی ہے جو کہ  $\frac{۲}{\text{ما}} = \text{ما}^2$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} = (\text{ع}^2 \text{ ما}^2) = ۲ \text{ ما}^2$$

$$\text{یا } \text{ع}^2 \text{ ما}^2 = \text{ما}^2 + \text{ما}^2 = ۲ \text{ ما}^2 \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ما}^2 \text{ فر لا}}{\text{ما}^2 + ۲} = \text{فر لا}$$



$$\text{یا } \text{جذر} - ۱ = \frac{۲}{۱} = ۲ + ۱$$

یعنی  $۲ = ۱ + ۱$  (جذر ۲ لا + ۱)  
**مثال ۲۔** حل کرو  $۱ + ۲ = ۳$  لا  $۳$  کو  
 یہاں مساوات میں  $۳$  موجود نہیں ہے، پس رکھو  $۳ = ۳$

$$\text{اس طرح } ۱ + ۳ = ۴ \text{ لا } ۴ \text{ مر } ۴$$

$$\text{یا } \frac{۴}{۱} = \frac{۴}{۱} = ۴ + ۱$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۳ = ۴ \text{ لا } ۴ \text{ مر } ۴$$

$$۱ + ۳ = ۴ \text{ لا } ۴ \text{ مر } ۴$$

$$\text{یا } ۱ + ۳ = ۴ \text{ لا } ۴ \text{ مر } ۴$$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $۱ + ۳ = ۴$  لا  $۴$  مر  $۴$  (جذر ۱ لا + ۱)  
 جہاں ۱ اور ۳ اختیاری مستقل ہیں۔

**مثال**

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۲ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۱ - ۱ = ۱$$

$$۲ - ۳ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۳ - ۱ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۴ - ۱ = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$۵ - ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$$







$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ی۔ کاسر ن و + ف و ہے۔

اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

تو جس رقم میں ی واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے  
اسی طرح اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات

$$\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) + \dots + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

پوری ہو تو وہ رقم جس میں ی واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔  
ی کاسر ہے

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

اگر و کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا ویسے ہی بھانپ لی جا سکے  
جو اوپر کے جملہ کو صفر بنادے تو ی = عا اور اس لئے ی = عا

اور ی = عا۔ رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات  
معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی حل ما = و کسی طرح سے معلوم ہو سکے

جبکہ اس کا بایاں رکن حذف کیا جائے تو ما = و ی رکھنے سے اور  
پھر ی = عا فرض کرنے سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں۔



## ۲۲۔ صورت آئینی

جیسا اوپر بیان ہوا درجہ دوم کی مساوات

$$پ + ف + با + ف + ما = ق$$

میں  $ما = نو - \frac{۱}{۲}$  کی ف در لا ہی مندرج کرنے سے اصلی مساوات

بعض اوقات سادہ صورت

$$پ + ف + می = ق$$

میں تبدیل ہو سکتی ہے۔

لیکن اس مساوات کا عام حل ابھی تک نہیں حاصل کیا گیا۔

## ”ٹھیک“ یا حاضر تفرقی مساوات

$$۲۳۔ اگر  $ق > نو$  تو  $لا^۱ = نو - \frac{ق}{۲}$  کامل تفرقی ہے$$

اور ما خواہ کچھ ہی ہو یہ تکمل ہو سکتا ہے

کیونکہ اگر  $\frac{ق}{۲}$  کو  $ما$  سے تعبیر کیا جائے تو

$$ک لا^۱ = ما - ۱ = لا^۱ - ۱ - ن - ۱ = ک لا^۱ - ۱ - ۱ - ۱ = ک لا^۱ - ۳$$

$$ک لا^۱ - ۱ - ۱ = ک لا^۱ - ۲ = لا^۱ - ۱ - ۱ - ۱ = ک لا^۱ - ۳$$

وغیرہ

$$ک لا^۱ - ۱ - ۱ = ک لا^۱ - ۲ = لا^۱ - ۱ - ۱ - ۱ = ک لا^۱ - ۳$$

$$اس طرح  $ک لا^۱ = لا^۱ - ۱ - ۱ - ۱ = ک لا^۱ - ۳$  +  $ن - ۱ = ک لا^۱ - ۳ - ۱ = ک لا^۱ - ۴$$$







$$f_1 - m_1 - k f_1 = m_1 - k f_1$$

$$f_2 - m_2 - k f_2 = m_2 - k f_2$$

$$f_3 - m_3 - k f_3 = m_3 - k f_3$$

وغیرہ وغیرہ

اس لئے جمع کرنے پر ظاہر ہے کہ اگر

$$f_1 - m_1 - k f_1 + f_2 - m_2 - k f_2 + \dots = 0$$

تو مساوات مفروضہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تفرقی ہے

$$(f_1 - m_1 - k f_1 + f_2 - m_2 - k f_2 + \dots) + m_1 = 0$$

$$+ (f_1 - m_1 - k f_1 + \dots) = 0$$

مثال کیا مساوات لایا  $12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 = 156$  جب لا حاضر مساوات ہے؟

حاضر مساوات کو بانچنے کے طریقہ کے موافق ہم دیکھتے ہیں کہ

$$f_1 = 24 - 2f_2 = 36 - 2f_3 = 48 - 2f_4 = 60 - 2f_5 = 72 - 2f_6 = 84 - 2f_7 = 96 - 2f_8 = 108 - 2f_9 = 120 - 2f_{10}$$

$$\text{اور } f_1 - f_2 + f_2 - f_3 + f_3 - f_4 + f_4 - f_5 + f_5 - f_6 + f_6 - f_7 + f_7 - f_8 + f_8 - f_9 + f_9 - f_{10} = 0$$

معلوم ہوا کہ یہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا مکملی ہے

$$(36 - 2f_3 + 48 - 2f_4 + 60 - 2f_5 + 72 - 2f_6 + 84 - 2f_7 + 96 - 2f_8 + 108 - 2f_9 + 120 - 2f_{10}) + m_1 = 0$$

$$یا 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 = 156$$



دایاں رکن کامل تفرقی سرے کا اگر

$$۱۲ لا^۲ - ۲۴ لا^۲ + ۱۲ لا^۲ =$$

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا تکملی ہے

$$(۸ لا^۳ - ۳ لا^۳) + ۴ لا^۳ = جب لا + لا + لا + ب$$

$$۴ لا^۳ + ۴ لا^۳ = جب لا + لا + لا + ب$$

یا جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سرے، پس تیسرا تکملی ہے

$$لا^۴ = جم لا + \frac{۱ لا^۲}{۲} + ب لا + ج$$

### امثلہ

۱۔ ثابت کرو کہ لا^۴ + ۱۵ لا^۴ + ۴۰ لا^۴ + ۶۰ لا^۴ = فو حاضر مساوات

ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔

۲۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$لا^۴ + ۶ لا^۴ + ۶ لا^۴ + جب لا (۳ - ۱) + جم لا (۳ - ۱) = جب لا$$

۳۔ ذیل کی مساواتوں کے پہلے تکملی معلوم کرو۔

$$(۱) لا^۴ + ۳ لا^۴ + لا + ۱ = فو$$

$$(ب) لا^۴ + ۳ لا^۴ + لا - ۱ = لا فو$$

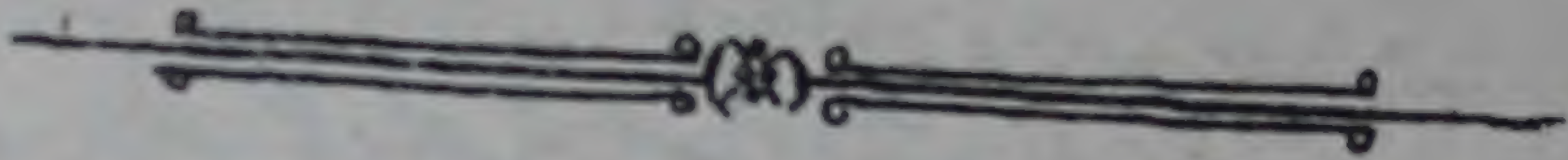
$$(ج) لا^۴ + ۳ لا^۴ + لا + ۱ = لوک لا$$

۴۔ اگر مساوات ف + ف + ف + ف = و کا ایک مکمل جزو ضربی



مہ ہو تو ثابت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$f_1 m - \frac{f_2}{m} = (f_1 m) + \frac{f_2}{m} =$$





# باب چہارم

## مستقل سروں الی خطی، تفرقی مساواتیں

### ۲۶۔ عام خطی تفرقی مساوات

ن، ویں رتبہ کی عام خطی تفرقی مساوات کی شکل ہے

$$\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_0}{0!} = 0 \dots (1)$$

یہاں  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  فی اور  $a$  کے معلوم تفاعل ہیں۔  
فرض کرو کہ مساوات کا کوئی خاص حل  $a = 0$  (دلا) ایسے ہی بھانپ  
لیا گیا ہے یا کسی طرح سے معلوم کر لیا گیا ہے۔

تب اگر  $a = 0$  (دلا)  $+ y$  مساوات میں مندرج کیا جائے تو حاصل

$$\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_0}{0!} = y \dots (2)$$

فرض کرو کہ  $y = y_1, y = y_2, y = y_3, \dots, y = y_n$  اس مساوات کے حل ہیں

تب ظاہر ہے کہ  $y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$

بھی مساوات (۲) کا حل ہے اور اس میں  $n$  مستقل  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$

شامل ہیں۔

اسلئے  $a = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + 0$  (دلا)

مساوات کا ایک ایسا حل ہے جس میں  $n$  مستقل شامل ہیں اور اس لئے



یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) خاص تکمیلی (خ، ک) کہلاتا ہے اور

اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ن مستقل شامل ہیں متمم تفاعل (ص، ت) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متمم تفاعل اس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں بائیں رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ دو مشہور صورتیں دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی

سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) جب مقادیر ف، ف، ف، ف، ف، ف سب مستقل ہوں

(۲) جب مساوات کا ذیل کی شکل اختیار کرے

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4} + \frac{a_5}{x_5} + \frac{a_6}{x_6} + \dots + \frac{a_n}{x_n} = 0$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 + \dots + a_n x_n = 0$$

جہاں  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_n$  مستقل ہیں اور ص، لا کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہو گا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

**مستقل سروں والی مساواتیں۔ متمم تفاعل**

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 + \dots + a_n x_n = 0 \quad (1)$$







مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔  
اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں

$$\text{فرض کرو کہ } m = m_1 + m_2 \\ \text{تب } \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n} \quad (2)$$

$$= \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n} \right) \quad (3)$$

اب چونکہ  $\frac{1}{m}$  اور  $\frac{1}{m_1}$  دو بے تعلق اختیاری مقداریں ہیں، اس لئے انہیں ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقداروں کی رقوم میں دو ربطوں کے ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔

اولاً  $\frac{1}{m}$  کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب  $\frac{1}{m}$  جہاں  $m$  لا انتہا کم ہے  $\frac{1}{m}$  کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔

ثانیاً  $\frac{1}{m_1}$  کو  $\frac{1}{m}$  سے مختلف علامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی منتخب کرو کہ  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}$  ایک اختیاری محدود مستقل  $\frac{1}{m}$  کے مساوی ہو۔  
اب رقوم

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n} \quad (4)$$

$m$  کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ  $\frac{1}{m}$  محدود ہے اور مربع خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مستند ہے اور اس میں  $\frac{1}{m}$  ربط جزو ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر  $m = m_1$  تو رقوم  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n}$  کی بجائے ہم

$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n}$  لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیاری











$$(1 + \frac{1}{r})^n = 1 + n\frac{1}{r} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{r}\right)^3 + \dots$$

اب رکھو  $1 + 1 = 2$  اور  $1 + 2 = 3$  جہاں  $2 + 2 = 4$  اور  $3 + 3 = 6$  محدود مستقل ہیں۔ جب ہم  $4 + 4 = 8$  کو لائے گا کم کرنے کے تو اوپر کے سلسلہ کی باقی رقیں بالآخر معدوم ہو جائیں گی۔

پس لہ فہ (۴۱) + لہ فہ (۴۲) کی بجائے

بِف (م، ا) + جِہ  $\frac{\text{حرفہ (م، ا)}}{\text{مزم}}$  رکھا جا سکتا ہے اور اس طرح

مستم تفاعل میں اختیاری مستقلات ب، پ، لہ، لہ ..... و

کی وہی تعداد (ن) قائم رہتی ہے جو پہلے تھی۔  
اور دفعہ اس کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر  $E$  اصلیں مساوی  
ہوں یعنی  $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_n = E$

تو رقم  $10^f + 10^m + \dots + 10^e$  کی بجائے ہم

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1}$$

رکھ سکتے ہیں جس سے حل کی عام شکل قائم رہتی ہے۔

دفعات ۲۹، ۳۰، ۳۱ کے نتائج اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں ان میں

فہ (م) کی صورت مولا تھی۔



۳۳ = خیالی اصلیں اگر دفعہ ۲۸ مساوات (۲) کی ایک اصل خیالی ہو تو یاد رہے کہ حقیقی سروں والی مساواتوں میں خیالی اصلوں کے ہمیشہ جوڑے واقع ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ  $م = ا + خ ب$ ،  $م = ا - خ ب$  جہاں  $خ = ا - م$

تب رقوم  $ا + م$ ،  $ا - م$  یا  $ا + م$ ،  $ا - م$  (۱ + خ ب) لا (۱ - خ ب) لا

حقیقی صورت میں اس طرح لائی جاسکتی ہیں:-

$ا + م$ ،  $ا - م$  (۱ + خ ب) لا (۱ - خ ب) لا

$ا + م$ ،  $ا - م$  (جم ب لا + خ ب ب لا) (جم ب لا - خ ب ب لا)

$(ا + م)$ ،  $ا - م$  (جم ب لا + خ ب ب لا) (جم ب لا - خ ب ب لا)

$ا + م$ ،  $ا - م$  (جم ب لا + خ ب ب لا) (جم ب لا - خ ب ب لا)

جہاں  $ا + م$  اور  $ا - م$  (جم ب لا + خ ب ب لا) کی بجائے

اختیاری مستقل  $ا$  اور  $ب$  رکھے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ  $ب = د جم ع$ ،  $ب = د جب ع$  تب

$د = ا + ب$  اور  $ع = م - ا$   $\frac{ب}{ا}$

$ب$  جم ب لا +  $ب$  جب ب لا =  $د جم (ب لا - ع)$

پس اس طرح ہم



بہ وُ لا جم ب لا + بہ وُ لا جب ب لا کی بجائے

ج وُ لا جم (ب لا + ج)

رکھ سکتے ہیں جہاں ج ج اختیاری مستقل ہیں۔

۴۔ مکرر خیالی اصلیں

مکرر خیالی اصلوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت

ہو چکا ہے کہ اگر  $م = م$  تو  $م وُ لا + م وُ لا$  کی بجائے

(بہ + بہ لا)  $م وُ لا$  لکھا جاسکتا ہے اور  $م وُ لا + م وُ لا$  کی بجائے

(بہ + بہ لا)  $م وُ لا$

پھر اگر  $م = م$  =  $و + خ ب$  اور  $م = م$  =  $و - خ ب$  تو ہم

$م وُ لا + م وُ لا + م وُ لا + م وُ لا$

کی بجائے (بہ + بہ لا)  $م وُ لا$  + (بہ + بہ لا)  $م وُ لا - خ ب لا$

یعنی  $م وُ لا$  [ (بہ + بہ) جم ب لا + (بہ - بہ) خ جب ب لا ]

+  $م وُ لا$  [ (بہ + بہ) جم ب لا + (بہ - بہ) خ جب ب لا ]

اور اسلئے  $م وُ لا$  (ج جم ب لا + ج جب ب لا) +  $م وُ لا$  (ج جم ب لا + ج جب ب لا)



یعنی  $\text{و}^{\text{لا}} (\text{ج} + \text{لا ج})$  جم ب لا +  $\text{و}^{\text{لا}} (\text{ج} + \text{لا ج})$  جب ب لا  
یا دوسری صورت میں  $\text{د}^{\text{لا}} (\text{ب لا + د}) + \text{د}^{\text{لا}} (\text{ج لا + د})$  جم (ب لا + د)  
کہہ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات  $\text{د}^{\text{لا}}$ ،  $\text{د}^{\text{لا}}$ ،  $\text{د}^{\text{لا}}$  کی بجائے ہیں پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (۴) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔  
ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اُس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصلوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

$$۳۵ - \text{مساوات} \quad \frac{\text{د}^{\text{لا}}}{\text{د}^{\text{لا}}} - ۳ = \frac{\text{د}^{\text{لا}}}{\text{د}^{\text{لا}}} + ۲ = ۰ \quad \text{کو حل کرو}$$

اس جگہ آزمائشی حل  $\text{د}^{\text{لا}} = ۱$   $\text{و}^{\text{لا}}$  ہے، اس کو مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}^{\text{لا}} - ۳ = \text{م} + ۲ = ۰$$

جبکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس  $\text{د}^{\text{لا}} = ۱$   $\text{و}^{\text{لا}}$  اور  $\text{د}^{\text{لا}} = ۱$   $\text{و}^{\text{لا}}$  دونوں خاص حل ہیں اور

$$\text{د}^{\text{لا}} = ۱ \quad \text{و}^{\text{لا}} + \text{د}^{\text{لا}} = ۱ \quad \text{و}^{\text{لا}}$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{مثال ۲} - \text{حل کرو} \quad \frac{\text{د}^{\text{لا}}}{\text{د}^{\text{لا}}} - ۲ = ۰ \quad \text{کو}$$

یہاں ابتدائی مساوات  $\text{م}^{\text{لا}} - ۲ = ۰$  ہے اور اس کی اصلیں  $\text{م} = ۲$  اور  $\text{م} = ۰$  ہیں



اور عام حل ہے  $ما = ا + و + لا$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں  
 $ما = با + جمر + لا + فب + جبر + لا$

جہاں  $ا$  کی بجائے  $با + فب$  اور  $و$  کی بجائے  $ب - با - فب$  لکھا گیا ہے

مثال ۳ -  $\frac{مر^۲}{ر لا} + ا^۲ = ما$  کو حل کرو

یہاں امدادی مساوات  $م^۲ + ا^۲ =$  کی اصلیں  $م = \pm$  اسے ہیں  
 اور عام حل ہے  $ما = ا + جم + لا + و$  جب  $ا$  لا  
 یا دوسری صورت میں  $ما = با + جم (ا + لا + فب)$

مثال ۴ -  $\frac{مر^۳}{ر لا} - \frac{مر^۲}{ر لا} + ۵ = ما$

یا (عف - ۱) (عف - ۲) = ما۔ جہاں  $\frac{مر}{ر لا}$  کی بجائے عف لکھا گیا ہے۔

امدادی مساوات ہے  $م^۳ - م^۲ + ۵م - ۲ =$  یا  
 $(م - ۱)(م - ۲) =$  یعنی اصلیں ۱، ۲ ہیں

پس عام حل ہے  $ما = (ا + و + لا) (ا + و + لا) + لا$

مثال ۵ - (عف + ۱) (عف - ۱) = ما

امدادی مساوات ہے  $(م + ۱)(م - ۱) =$

جس کی اصلیں  $\pm$  ۱ ہیں، اس لئے عام حل ہے  
 $ما = ا + جم + لا + و$  جب  $ا$  لا + فب + لا



یا ما = بجم (لا + بی) + لے فو

مثال ۶۔ حل کرو (عف + عف + ا) (عف - ۲) ما = کو

امدادی مساوات ہے (م + م + ا) (م - ۲) =

اور اس کی اصلیں ہیں -  $\frac{1}{4} \pm \frac{3}{2}$  اور ۲ اس لئے عام حل ہے

ما = ل فو  $\frac{1}{4}$  جم لا  $\frac{3}{2}$  + ل فو  $\frac{1}{4}$  جب لا  $\frac{3}{2}$  + ل فو  $\frac{1}{4}$

یا ما = ب فو  $\frac{1}{4}$  جم (لا  $\frac{3}{2}$  + بی) + لے فو  $\frac{1}{4}$

مثال ۷۔ (عف + عف + ا) (عف - ۲) (عف - ۵) ما = کو حل کرو

صریحاً اس کا عام حل ہے

ما = (ل + ل لا) فو  $\frac{1}{4}$  جم لا  $\frac{3}{2}$  + (ل + ل لا) فو  $\frac{1}{4}$  جب لا  $\frac{3}{2}$

+ (ل + ل لا + ل لا) فو  $\frac{1}{4}$  + ل فو  $\frac{1}{4}$

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ \frac{۲}{۴} \frac{ما}{لا} - (ب + ا) \frac{ما}{لا} + ب ما =$$

$$۲۔ \frac{۳}{۴} \frac{ما}{لا} - ۱۶ \frac{ما}{لا} + ۱۱ \frac{ما}{لا} - ۶ \frac{ما}{لا} =$$

$$۳۔ \frac{۳}{۴} \frac{ما}{لا} - ۹ \frac{ما}{لا} + ۲۳ \frac{ما}{لا} - ۱۵ ما =$$



$$6 = \frac{6^3}{6^3} - 5 \quad 0 = 6^2 + \frac{6}{6^3} - 3$$

$$4 - \frac{\text{مرفوع} 6}{\text{مرفوع} 6} = 6 - (عف - 1) (عف - 2) = 6$$

$$8 - (\text{عفا}^2 + 1)(\text{عفا}^2 + \text{عفا} + 1) = 9 - (\text{عفا}^2 + 1)(\text{عفا} - 1) = 6$$

$$10. - (عف^2 + ا^3) (عف^2 + عف + ا) = 6.$$

$$11 - (\text{عف} - 1)^3 (\text{عف} - 2) (\text{عف}^2 + 2\text{عف} + 2) = 1$$

۱۲۔ (عفء + وء) (عفء + بء) (عفء + جء + عفء + جء) = ۶۔

خاص تکمیلی

۳۶۔ اوپر ہم نے مساوات  $F = ma$  کے متکم تفاعل پر غور کیا ہے جہاں

$$f_n(\text{عف}) = \text{عف}^n + \text{عف}^{n-1} + \text{عف}^{n-2} + \dots + 1$$

اور لڑ لڑ کر.....، لڑ مستقل ہیں و، لا کا کوئی تفاعل ہے، اب ہم اس مساوات کے خاص تکمیلی کو حاصل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

ہم اوپر کی مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n)}$  و

یہ [ف د ع ف] آؤ جہاں  $\frac{1}{\text{ف د ع ف}}$  ایک ایسا عامل ہے کہ

ف (عف) [ف (عف) و] = و



۳۷۔ "عف" جبر و مقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے  
تفرقی احصائیں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف

(یعنی  $\frac{م}{و}$ ) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے  
(۱) جبر و مقابلہ کا تقسیمی قانون یعنی

$$\text{عف} (م + و + ه + ...) = \text{عف} م + \text{عف} و + \text{عف} ه + \dots$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بلحاظ مستقلوں کے یعنی  
عف (ج م) = ج (عف م)

(۳) قانون قوت نما یعنی

$$\text{عف}^{\text{م}} \text{عف}^{\text{ن}} م = \text{عف}^{\text{م}+\text{ن}} م$$

جہاں م، ن مثبت صحیح ہیں۔  
پس رمز یا علامت عف جبر و مقابلہ کی باہمی ترکیب کے تمام  
ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے، صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس  
کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔

پس معلوم ہوا کہ کسی منطق جبر و مقابلہ کے جواب میں عاملوں  
کا بھی ایک متناظر تماشل ہو گا مثلاً مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$(م + و) = م + و + \frac{و(و-م)}{۲ \times ۱} + \frac{و(و-م)^۲}{۲ \times ۱} + \dots + و^{\text{ن}}$$

اور ایسے ہی بغیر فرید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(\text{عف} + و) = \text{عف} + و + \frac{و(و-ن)}{۲ \times ۱} + \frac{و(و-ن)^۲}{۲ \times ۱} + \dots + و^{\text{ن}}$$

$$= \text{عف}^{\text{ن}} + و + \frac{و(و-ن)}{۲ \times ۱} + \frac{و(و-ن)^۲}{۲ \times ۱} + \dots + و^{\text{ن}}$$



۳۸۔ عمل ف (عف) و لا  
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر مثبت صحیح ہو تو  
عف و لا = و لا

فرض کرو کہ عمل عف۔ ایسا ہے کہ  
عف عف۔ می = می  
اس تعریف کے مطابق عف۔ عمل تکمل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض  
کرتے ہیں کہ عمل عف۔ می میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں  
ہوتا (کیونکہ یہاں ہمیں صرف ایک خاص تکمیلی کی تلاش ہے نہ کہ عام  
سے عام تکمیلی کی)

اب چونکہ عف۔ و لا = عف۔ عف۔ و لا

اس سے ظاہر ہے کہ عف۔ و لا = و لا

اس لئے ظاہر ہے کہ ن کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے  
عف و لا = و لا

۳۹۔ فرض کرو کہ ف (می) کوئی جملہ می کا ہے جو ی کی مثبت  
یا منفی صحیح قوتوں میں (= حح۔ می۔ جہاں و ایک مستقل ہے  
اور می پر منحصر نہیں ہے) پھیل سکتا ہے

تب ف (عف) و لا = (حح۔ عف) و لا

= (حح۔ عف۔ و لا)

= (حح۔ و لا)



= ف (ر) <sup>ولا</sup> = عمل ف (عف) <sup>ولا</sup> کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے ر رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔  $\frac{1}{\text{عف}^1 + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + 1}$  <sup>ولا</sup> کی قیمت معلوم کرو۔  
اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے

$$\frac{1}{1+2+2+3} \quad \text{ولا} \quad \frac{1}{15}$$

مثال ۲۔  $\frac{\text{عف} + 1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)}$  <sup>ولا</sup> کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے  $\frac{2}{4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{15}$  <sup>ولا</sup>

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$(1) \frac{1}{\text{عف} + 1} \quad \text{ولا} \quad (2) \frac{1}{(\text{عف} + 1)(\text{عف} + 2)} \quad \text{ولا}$$

$$(3) \frac{1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)} \quad \text{جز لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ  $\frac{\text{عف}^2}{(\text{عف} - 1)(\text{عف} - 2)(\text{عف} - 3)} = \frac{1}{(1-1)(2-1)(3-1)} + \frac{1}{(1-2)(2-2)(3-2)} + \frac{1}{(1-3)(2-3)(3-3)}$

۳۔ ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال کرو

ف (عف<sup>۱</sup>) جب م لا = ف (م<sup>۱</sup>) جب م لا

ف (عف<sup>۲</sup>) جب م لا = ف (م<sup>۲</sup>) جب م لا



ف (عف) جہنم لا = ف (م) جہنم لا

۴۰۔ عمل ف (عف) و لا

فرض کرو کہ ما = و لا ما جہان ما لا کا تفاعل ہے۔

تب چونکہ عف و لا = و لا

اس لئے یب نیز کے مسئلہ کی رو سے

ما = و لا (و ما + ج و عف ما + ج و عف ما + ..... + عف ما)

جسے مسئلہ ثنائی کی طرح لکھنے سے حاصل ہوتا ہے [دفعہ ۳۷]

عف و لا ما = و لا (عف + و) ما

جہاں ن مثبت صحیح ہے۔  
اب فرض کرو کہ (عف + و) ما = لا

جسے ہم لکھ سکتے ہیں ما = (عف + و) لا

تب چونکہ عف و لا ما = و لا (عف + و) ما

یا عف و لا (عف + و) لا = و لا لا

اس لئے عف و لا لا = و لا (عف + و) لا

اس لئے تمام صورتوں میں ن کی مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

عف و لا لا = و لا (عف + و) لا



۴۱۔ جیسا دفعہ ۳۹ میں ہم نے دیکھا

$$ف (عف) وُلا = ح (ر عف) وُلا$$

$$= ح (ر عف وُلا)$$

$$= وُلا ح (ر عف + ۱) لا$$

$$= وُلا ف (عف + ۱) لا$$

یعنی وُلا کو ہم عامل ف (عف) کے بائیں جانب سے دائیں جانب  
لا سکتے ہیں بشرطیکہ ہم عف کی بجائے عف + ۱ لکھ دیں۔

$$\text{مثال ۱۔} \frac{۱}{(عف-۱)۳} وُلا = وُلا \frac{۱}{عف۳} لا = وُلا \frac{۱}{۲ \times ۳ \times ۴} لا$$

$$\text{مثال ۲۔} \frac{۱}{عف۲-۴} وُلا جب لا = وُلا \frac{۱}{عف۲} جب لا = - وُلا جب لا$$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{۱}{(عف-۱)۳} وُلا لا، \frac{۱}{(عف-۱)۲} وُلا جب لا، \frac{۱}{عف-۱} وُلا لوک لا$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{(عف+۱-۱)(عف+۱-۲)} وُلا = \frac{۱}{(عف+۱-۲)(عف+۱-۳)} وُلا$$

$$۴۲۔ عمل ف (عف) جب م لا$$



$$\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

اور اس لئے عفا<sup>۲</sup> جب م لا = (-م<sup>۲</sup>) جب م لا  
اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

$$ف (عفا) \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

مثال ۱:  $\text{ولا} \text{ جب } ب \text{ لا} = \text{عفا}^1 \text{ ولا} \text{ جب } ب \text{ لا} = \text{ولا} (عفا + ف) \text{ جب } ب \text{ لا} [دفعہ ۴۱]$

$$= \frac{\text{ولا}^1 - \text{عفا}^1}{\text{عفا}^2} \text{ جب } ب \text{ لا}$$

$$= \frac{\text{ولا}^1}{\text{عفا}^2 + ب^2} (-عفا) \text{ جب } ب \text{ لا} [دفعہ ۴۲]$$

$$= \frac{\text{ولا}^1 \text{ جب } ب \text{ لا} - \text{عفا}^1 \text{ جب } ب \text{ لا}}{\text{عفا}^2 + ب^2} = \text{ولا}^1 (\text{عفا}^2 + ب^2) \text{ جب } ب \text{ لا}$$

یسا (پ)

امثلہ

۱۔ اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکمیلی معلوم کرو

$\text{ولا}^1 \text{ جب } ب \text{ لا}$ ،  $\text{ولا}^2 \text{ جب } ب \text{ لا}$ ،  $\text{عفا}^1 \text{ جب } ب \text{ لا}$ ،  $\text{عفا}^2 \text{ جب } ب \text{ لا}$

۲۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{\text{عفا}^1}{\text{عفا}^2 + ب^2} \text{ جب } ب \text{ لا}^1، \frac{\text{عفا}^2}{\text{عفا}^2 + ب^2} \text{ جب } ب \text{ لا}^2، \frac{\text{عفا}^1}{\text{عفا}^2 + ب^2} \text{ جب } ب \text{ لا}^3، \frac{\text{عفا}^2}{\text{عفا}^2 + ب^2} \text{ جب } ب \text{ لا}^4$$

۳۔ جیب اور جیب التمام کی قوت ثنائی قیمتوں کے ذریعہ اعمال  
ف (عفا) جب م لا، ف (عفا) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔



$$۴۳ - \text{عمل} = \frac{۱}{\text{ف (دعفا)}} \text{ جب م لا}$$

اب ہم عمل  $\frac{۱}{\text{ف (دعفا)}}$  جب م لا پر غور کریں گے جہاں ف (دی) ایک  
ایسا تفاعل سی کا ہے کہ اسے ہم سی کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا  
سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (دعفا) کو عفا کی قوتوں میں پھیلا یا گیا ہے اب  
اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی  
رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً  $\frac{۱}{\text{عفا}^۱ + \text{عفا}^۲ + \text{عفا}^۳} = \text{جب م لا} = \frac{۱}{۶۴ - ۱۶ + ۴ - ۱} = \frac{۱}{۵۱} = \text{جب م لا}$   
لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا  
ہے، جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل  
مذکور کو اس طرح لکھو

$$\frac{۱}{\text{ف (دعفا)}} = \text{جب م لا} = \frac{۱}{\text{ف (دعفا}^۱\text{) + عفا}^۱\text{ (فادعفا}^۱\text{)}}$$

$$= \frac{\text{ف (دعفا}^۱\text{) - عفا}^۱\text{ (فادعفا}^۱\text{)}}{\text{جب م لا}} = \frac{[\text{ف (دعفا}^۱\text{)}] - [\text{عفا}^۱\text{ (فادعفا}^۱\text{)}]}{\text{جب م لا}}$$

$$= \frac{[\text{ف (دعفا}^۱\text{) - عفا}^۱\text{ (فادعفا}^۱\text{)}]}{\text{جب م لا}} = \frac{[\text{ف (د-م}^۱\text{)}] - [\text{عفا}^۱\text{ (فاد-م}^۱\text{)}]}{\text{جب م لا}} = \frac{[\text{ف (د-م}^۱\text{)}] + [\text{م}^۱\text{ (فاد-م}^۱\text{)}]}{\text{جب م لا}}$$



یغور دیکھتے سے معلوم ہوگا کہ عملی طور پر عفا کی بجائے - مم فوراً اس منزل  
 فہ (دعفا) + عفا (فادعفا) جب م لا کے بعد لکھ سکتے  
 ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$1 \quad \text{جب م لا} \quad \frac{\text{فہ (دعفا) + عفا (فادعفا)}}{}$$

یا  
 فہ (دعفا) - عفا (فادعفا) جب م لا وغیرہ  
 [فہ (دعفا)] - عفا [فادعفا] فوراً لکھ سکتے ہیں۔

مثال ۱ - عفا + عفا + عفا جب ۲ لا کی قیمت  
 معلوم کرو۔

$$1 \quad \text{یہ ہے} \quad \frac{\text{عفا} + ۱ + \text{عفا (دعفا)} + ۱}{}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{\text{عفا} + ۱ + \text{عفا (دعفا)}}{\text{عفا}}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{\text{عفا} - ۱}{\text{عفا (دعفا)} - ۱}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{\text{عفا (دعفا)} - ۱}{\text{عفا (دعفا)} - ۱}$$

$$1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{15} - \frac{1}{15} \text{ جب ۲ لا}$$

مثال ۲ - عفا (دعفا) ۱۵ - ۱۵ جب ۲ لا کی قیمت حاصل کرو



$$\text{یہ جملہ} = \frac{\text{فول}^2}{\text{دعف} + 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{\text{فول}^2}{\text{دعف} + 3 + \text{دعف} + 2 + \text{دعف} + 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{\text{فول}^2}{\text{دعف} - 3 + \text{دعف} + 3 + 1} \text{جم لا} [\text{دعف کی بجائے} - 1]$$

لکھنے سے [

$$= \frac{\text{فول}^2}{2} \frac{1}{\text{دعف} - 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{\text{فول}^2}{2} \frac{\text{دعف} + 1}{\text{دعف} - 1} \text{جم لا}$$

$$= \frac{\text{فول}^2}{2} (\text{دعف} + 1) - \frac{\text{جم لا}}{2} = \frac{\text{فول}^2}{2} (\text{جم لا} - \text{جب لا})$$

مثلاً

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

$$\frac{\text{دعف}}{\text{دعف} - 1} \text{فول جب لا} \quad \frac{\text{دعف}^3}{(\text{دعف} - 1)(\text{دعف} - 2)} \text{فول جب لا}$$

$$\frac{1}{\text{دعف} - 1} \text{فول جب لا} + \frac{1}{\text{دعف} + 1} \text{فول جب لا}$$

$$۲۔ ثابت کرو کہ \frac{1}{\text{دعف} + 1} = \frac{\text{فول}^2}{\text{دعف} + 1} \text{فول جب لا} \dots \text{فول جب لا}$$

جہاں ن تنگلی علامتیں ہیں۔

$$۳۔ ثابت کرو کہ \frac{1}{\text{ف}(\text{د} \text{ی})} \text{کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے}$$



عمل  $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$  و معمولی تکملوں کے حاصل جمع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ عامل  $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$  و جہاں و مقدار جبریہ ہے۔

اگر عمل  $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$  و میں و متغیر لا کا ایک جبریہ،

منطق، صحیح تفاعل ہو تو ہم  $\frac{1}{f \text{ (دفع)}}$  کو کسی نہ کسی طریقہ سے  $f$  کی صعودی قوتوں میں اس حد تک پھیلا سکتے ہیں کہ  $f$  کا قوت نما و میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کے مساوی ہو۔

مثال ۱۔ مثلاً معلوم کرو  $\frac{1}{1 + f + f^2} (1 + 2f + f^2)$

یہ جملہ  $= \frac{1 - f}{1 - f^3} (1 + 2f + f^2)$

$= (1 - f + f^2 - f^3 + \dots) (1 + 2f + f^2)$

$= (1 + 2f + f^2) - (f + 2f^2 + f^3) = 1 - f$

مثال ۲۔ نیز  $\frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$  کی قیمت دریافت کرو

جملہ  $= \frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$

$= \frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$

$= \frac{1}{1 + f + f^2 + f^3} (1 + 2f + f^2 + f^3)$



$$\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۵} - (۱ - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \text{ عفا } ۱$$

$$\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۵} - (۱ - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \text{ عفا } ۱$$

مثلاً

ذیل کے عمل کرو۔

$$۱ - \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} = \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} \text{ عفا } ۱$$

$$۲ - \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} = \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} \text{ عفا } ۱$$

$$۳ - \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} = \frac{۱}{(۱+۲) \text{ عفا } ۱} \text{ عفا } ۱$$

۴۵۔ ایسی صورتیں جن میں یہ طریقے ناکام رہتے ہیں۔  
خاص تکمیلی حاصل کرنے کے جو طریقے اوپر درج کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے میں اکثر اوقات کئی صورتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جہاں یہ طریقے کامیاب نہیں ہو سکتے، اب ہم یہ بتانے کی کوشش کرتے ہیں کہ ایسی حالتوں میں طرز عمل کیا ہونا چاہئے۔

$$۴۶۔ مساوات \frac{۱}{۱} = ۱ = ۱ \text{ کو حل کرو}$$

مستم تفاعل ۱ کو ہے۔

خاص تکمیلی حاصل کرنے کے لئے  $\frac{۱}{۱}$  کی قیمت معلوم ہونی

چاہئے۔ اگر ہم دفعہ ۳۹ کا قاعدہ استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۱} = ۱$$



اس مشکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۴۱ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حال ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} = \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{عف}} = 1 = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا فو}}$$

جو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل  $\frac{1}{\text{عف} - 1}$  کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱ + م) لکھنے سے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} = \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{عف} - 1} = \frac{1}{\text{لا (۱ + م)}} = \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا فو}}$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} = \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا فو}} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا فو}} + \frac{1}{\text{لا فو}^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{\text{ہا}} = \left[ \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا فو}} + \frac{1}{\text{لا فو}^2} + \dots \right]$$

اس جملہ میں سے حصہ ہا  $\frac{1}{\text{لا}}$  لا متناہی ہو جاتا ہے لیکن اسے

ہم متہم تفاعل ۱ و ۱ کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ ۱ کی قیمت اختیاری ہے اس لئے ہم ۱ +  $\frac{1}{\text{لا}}$  کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ ۱ کا ایک حصہ منفی اور غیر متناہی فرض کیا جاسکتا ہے جو رقم  $\frac{1}{\text{لا}}$  کا توازن کر دے گا۔

پس لا فو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

باقی رقموں میں مہ شریک ہوتا ہے جو مہ کے لا انتہا کم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

$$\text{پس مساوات کا پورا عمل } 1 = 1 + \frac{1}{\text{لا فو}} = 1$$



مثال ۲۔ مساوات  $\frac{r^2}{r^2} + m = r + \text{جب } 2 \text{ لا کو حل کرو}$

مستم تفاعل صریحاً یہ ہے  $m = r + \text{جب } 2 \text{ لا} + \text{ب جم } 2 \text{ لا}$   
 خاص تکمیلی کے دو حصے ہیں  $\frac{1}{r^2} + m$  تو یا  $\frac{1}{r} + m$  اور  $\frac{1}{r} + m$  جب  $2 \text{ لا}$   
 دوسرے حصہ میں اگر دفعہ  $m$  کا قاعدہ استعمال کیا جائے تو حاصل ہوگا  
 جب  $2 \text{ لا}$  یعنی  $\infty$  پس یہ قاعدہ ناکام رہے گا۔

اب ہم  $\frac{1}{r^2} + m$  جب  $2 \text{ لا}$   $(1+m)$  کی انتہا معلوم کرتے ہیں جبکہ  
 $m = 0$

یہ جملہ  $= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+m)}$  جب  $(2 \text{ لا} + 2 \text{ لا})$

$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+m)} \text{ (جب } 2 \text{ لا جم } 2 \text{ لا} + \text{جم } 2 \text{ لا جب } 2 \text{ لا})$

$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+m)} \text{ [جب } 2 \text{ لا} (1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r(1+m)} + \dots) + \text{جم } 2 \text{ لا} (1 - \dots)]$

$= \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+m)} - \frac{1}{r} + \text{جم } 2 \text{ لا} + m \text{ کی قوتیں}$

$=$  (ایک ایسی رقم جو مستم تفاعل میں شریک کر دی جاسکتی

ہے)  $-\frac{1}{r} + \text{جم } 2 \text{ لا} + (رقمیں جو ص کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)$

پس تفرقی مساوات کا پورا حل ہے

$m = r + \text{جب } 2 \text{ لا} + \text{ب جم } 2 \text{ لا} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} - \text{جم } 2 \text{ لا}$



مثال ۳۔ مساوات (عفا + عفا۳) (دعفا - ا) = ما = فو + فو۲ + جب لا + لا۲ کو حل کرو۔

اس صورت میں متم تفاعل صیرجاً ۱ + ۱ + فو۳ + (۱ + فو۲ + فو) فو ہے۔  
خاص تکمیلی کے چار حصے ہیں یعنی

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{فو}{(دعفا - ا)} = \frac{1}{۲} \times \frac{فو}{۲} = \frac{فو}{۴} = ۱ \times \frac{1}{۴} = \frac{لا۲}{۸}$$

$$\left[ \text{یا ملاحظہ ہو } \frac{1}{(دعفا - ا)} = \frac{فو}{۲} = \frac{1}{۲} (ا + ما) = \frac{1}{۲} (ا + ما + لا + لا۲ + ...) \right]$$

= (ایک حصہ جو متم تفاعل میں چلا جاتا ہے)

$$+ \frac{لا۲}{۸} + (ایسی رقمیں جو ص کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)$$

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{فو}{۱۰} = \frac{لا۲}{۱۰}$$

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{1}{(ا + ۱ + عفا۳ + عفا۲)(دعفا - ا)} = \text{جب لا} =$$

$$= \frac{1}{۶ + عفا۲ + عفا۳} = \text{جب لا} = \frac{1}{۶ + عفا۲} = \frac{۳ - عفا}{۲(۹ - عفا)} = \text{جب لا}$$

$$= (۳ جب لا - جم لا) / ۲۰$$

اور اخیر میں

$$\frac{1}{(دعفا + عفا۳)(دعفا - ا)} = \frac{لا۲}{۳} = \frac{1}{۳} (ا + عفا۳) (ا + عفا۲ + عفا + عفا۳ + ...) = لا۲$$

$$= \frac{1}{۳ عفا} (ا + عفا۳) (لا۲ + ۴ + ۶) =$$



$$= \frac{1}{3\text{عف}} (1 - \frac{\text{عف}^2}{9} + \dots) (1 + 2\text{لا} + 4)$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (1 + 2\text{لا} + 4 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\text{لا} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\text{لا}^2)$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (\frac{22}{9} + \frac{10}{3}\text{لا} + \frac{22}{9}\text{لا}^2)$$

$$= \frac{1}{3\text{عف}} (\frac{22}{9} + \frac{5}{3}\text{لا} + \frac{22}{9}\text{لا}^2)$$

اس لئے پورا حل ہے

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\text{فو} - \frac{1}{3}\text{لا} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\text{لا})\text{فو} - \frac{1}{3}\text{لا}^2$$

$$+ \frac{1}{8}\text{لا}^2\text{فو} + \frac{1}{10}\text{فو}^2 + \frac{1}{20}\text{جب لا۔ جم لا} + \frac{1}{9}\text{لا}^2 + \frac{1}{9}\text{لا}^2 + \frac{22}{24}$$

مثال ۴۔ مساوات  $\frac{\text{فو}^2}{\text{فو لا}^2} - \text{لا} = \text{لا جب لا کو حل کرو}$

شتم تفاعل (م، ت) ہے  $\frac{1}{3}\text{جب لا} + \frac{1}{3}\text{جم لا} + \frac{1}{3}\text{جب لا} + \frac{1}{3}\text{جم لا}$

(خاص سکسلی) (خ، ک) ہے  $\frac{1}{3\text{عف}} \text{لا جب لا جو خ کا سر ہے}$

$$\frac{1}{3\text{عف}} \text{لا فو ح لا میں}$$

$$\text{یعنی فو ح لا} \frac{1}{3\text{عف} + \text{خ}} - \text{لا میں}$$

$$\text{یعنی فو ح لا} \frac{1}{3\text{عف} - 2\text{عف} + \dots} - \text{لا میں}$$



یعنی  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ} \dots}$  لا میں

یعنی  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  (لا +  $\frac{3}{2} \text{خ}$ ) میں

یعنی  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  (لا -  $\frac{3}{2} \text{خ}$ ) میں

پس خاص تکملی ہے  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  لا جب لا

اور پورا حل ہے

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$$

امثلہ

۱۔ مندرجہ ذیل کے خاص تکملی حاصل کرو

(۱)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  جب لا (۲)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  جم ۲ لا

(۳)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  جنبر لا (۴)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  لا

(۵)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  (۶)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  (جنبر لا + جب لا)

(۷)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  (لا + جنبر لا)

(۸)  $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{عف} - \frac{1}{4} \text{خ}}$  جم ۲ لا جم ۳ لا

۲۔ ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔



$$(۱) \frac{۲}{۱} م - م = ۲ م$$

$$(۲) \frac{۲}{۲} م - م = م$$

$$(۳) \frac{۲}{۲} م + م = ۲ م + ۲ م + ۲ م + ۲ م = ۸ م$$

$$(۴) (۱-۱) م = ۰ م$$

$$(۵) (۱-۱) م = ۰ م$$

$$(۶) (۳-۳) م = ۰ م$$

$$(۷) (۱-۱) م = ۰ م$$

$$(۸) (۱-۱) م = ۰ م$$

$$(۹) (۱-۱) م = ۰ م$$

$$(۱۰) (۱-۱) م = ۰ م$$

$$۴۷ - عامل لا$$

اس قسم کی مساوات

$$\frac{۱}{۱} م + \frac{۱}{۲} م + \frac{۱}{۳} م + \frac{۱}{۴} م + \frac{۱}{۵} م + \frac{۱}{۶} م + \frac{۱}{۷} م + \frac{۱}{۸} م + \frac{۱}{۹} م + \frac{۱}{۱۰} م + \frac{۱}{۱۱} م + \frac{۱}{۱۲} م + \frac{۱}{۱۳} م + \frac{۱}{۱۴} م + \frac{۱}{۱۵} م + \frac{۱}{۱۶} م + \frac{۱}{۱۷} م + \frac{۱}{۱۸} م + \frac{۱}{۱۹} م + \frac{۱}{۲۰} م + \frac{۱}{۲۱} م + \frac{۱}{۲۲} م + \frac{۱}{۲۳} م + \frac{۱}{۲۴} م + \frac{۱}{۲۵} م + \frac{۱}{۲۶} م + \frac{۱}{۲۷} م + \frac{۱}{۲۸} م + \frac{۱}{۲۹} م + \frac{۱}{۳۰} م + \frac{۱}{۳۱} م + \frac{۱}{۳۲} م + \frac{۱}{۳۳} م + \frac{۱}{۳۴} م + \frac{۱}{۳۵} م + \frac{۱}{۳۶} م + \frac{۱}{۳۷} م + \frac{۱}{۳۸} م + \frac{۱}{۳۹} م + \frac{۱}{۴۰} م + \frac{۱}{۴۱} م + \frac{۱}{۴۲} م + \frac{۱}{۴۳} م + \frac{۱}{۴۴} م + \frac{۱}{۴۵} م + \frac{۱}{۴۶} م + \frac{۱}{۴۷} م + \frac{۱}{۴۸} م + \frac{۱}{۴۹} م + \frac{۱}{۵۰} م + \frac{۱}{۵۱} م + \frac{۱}{۵۲} م + \frac{۱}{۵۳} م + \frac{۱}{۵۴} م + \frac{۱}{۵۵} م + \frac{۱}{۵۶} م + \frac{۱}{۵۷} م + \frac{۱}{۵۸} م + \frac{۱}{۵۹} م + \frac{۱}{۶۰} م + \frac{۱}{۶۱} م + \frac{۱}{۶۲} م + \frac{۱}{۶۳} م + \frac{۱}{۶۴} م + \frac{۱}{۶۵} م + \frac{۱}{۶۶} م + \frac{۱}{۶۷} م + \frac{۱}{۶۸} م + \frac{۱}{۶۹} م + \frac{۱}{۷۰} م + \frac{۱}{۷۱} م + \frac{۱}{۷۲} م + \frac{۱}{۷۳} م + \frac{۱}{۷۴} م + \frac{۱}{۷۵} م + \frac{۱}{۷۶} م + \frac{۱}{۷۷} م + \frac{۱}{۷۸} م + \frac{۱}{۷۹} م + \frac{۱}{۸۰} م + \frac{۱}{۸۱} م + \frac{۱}{۸۲} م + \frac{۱}{۸۳} م + \frac{۱}{۸۴} م + \frac{۱}{۸۵} م + \frac{۱}{۸۶} م + \frac{۱}{۸۷} م + \frac{۱}{۸۸} م + \frac{۱}{۸۹} م + \frac{۱}{۹۰} م + \frac{۱}{۹۱} م + \frac{۱}{۹۲} م + \frac{۱}{۹۳} م + \frac{۱}{۹۴} م + \frac{۱}{۹۵} م + \frac{۱}{۹۶} م + \frac{۱}{۹۷} م + \frac{۱}{۹۸} م + \frac{۱}{۹۹} م + \frac{۱}{۱۰۰} م$$

کو جس میں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

$$\frac{۱}{۱} م = \frac{۱}{۲} م + \frac{۱}{۳} م + \frac{۱}{۴} م + \frac{۱}{۵} م + \frac{۱}{۶} م + \frac{۱}{۷} م + \frac{۱}{۸} م + \frac{۱}{۹} م + \frac{۱}{۱۰} م + \frac{۱}{۱۱} م + \frac{۱}{۱۲} م + \frac{۱}{۱۳} م + \frac{۱}{۱۴} م + \frac{۱}{۱۵} م + \frac{۱}{۱۶} م + \frac{۱}{۱۷} م + \frac{۱}{۱۸} م + \frac{۱}{۱۹} م + \frac{۱}{۲۰} م + \frac{۱}{۲۱} م + \frac{۱}{۲۲} م + \frac{۱}{۲۳} م + \frac{۱}{۲۴} م + \frac{۱}{۲۵} م + \frac{۱}{۲۶} م + \frac{۱}{۲۷} م + \frac{۱}{۲۸} م + \frac{۱}{۲۹} م + \frac{۱}{۳۰} م + \frac{۱}{۳۱} م + \frac{۱}{۳۲} م + \frac{۱}{۳۳} م + \frac{۱}{۳۴} م + \frac{۱}{۳۵} م + \frac{۱}{۳۶} م + \frac{۱}{۳۷} م + \frac{۱}{۳۸} م + \frac{۱}{۳۹} م + \frac{۱}{۴۰} م + \frac{۱}{۴۱} م + \frac{۱}{۴۲} م + \frac{۱}{۴۳} م + \frac{۱}{۴۴} م + \frac{۱}{۴۵} م + \frac{۱}{۴۶} م + \frac{۱}{۴۷} م + \frac{۱}{۴۸} م + \frac{۱}{۴۹} م + \frac{۱}{۵۰} م + \frac{۱}{۵۱} م + \frac{۱}{۵۲} م + \frac{۱}{۵۳} م + \frac{۱}{۵۴} م + \frac{۱}{۵۵} م + \frac{۱}{۵۶} م + \frac{۱}{۵۷} م + \frac{۱}{۵۸} م + \frac{۱}{۵۹} م + \frac{۱}{۶۰} م + \frac{۱}{۶۱} م + \frac{۱}{۶۲} م + \frac{۱}{۶۳} م + \frac{۱}{۶۴} م + \frac{۱}{۶۵} م + \frac{۱}{۶۶} م + \frac{۱}{۶۷} م + \frac{۱}{۶۸} م + \frac{۱}{۶۹} م + \frac{۱}{۷۰} م + \frac{۱}{۷۱} م + \frac{۱}{۷۲} م + \frac{۱}{۷۳} م + \frac{۱}{۷۴} م + \frac{۱}{۷۵} م + \frac{۱}{۷۶} م + \frac{۱}{۷۷} م + \frac{۱}{۷۸} م + \frac{۱}{۷۹} م + \frac{۱}{۸۰} م + \frac{۱}{۸۱} م + \frac{۱}{۸۲} م + \frac{۱}{۸۳} م + \frac{۱}{۸۴} م + \frac{۱}{۸۵} م + \frac{۱}{۸۶} م + \frac{۱}{۸۷} م + \frac{۱}{۸۸} م + \frac{۱}{۸۹} م + \frac{۱}{۹۰} م + \frac{۱}{۹۱} م + \frac{۱}{۹۲} م + \frac{۱}{۹۳} م + \frac{۱}{۹۴} م + \frac{۱}{۹۵} م + \frac{۱}{۹۶} م + \frac{۱}{۹۷} م + \frac{۱}{۹۸} م + \frac{۱}{۹۹} م + \frac{۱}{۱۰۰} م$$

ظاہر ہے کہ عامل لا اور ۱/۲ م ایک دوسرے کے معادل ہیں



فرض کرو کہ  $\frac{لا}{فر$  کی بجائے ہم عف کہتے ہیں، اس طرح سے حاصل ہوگا

$$\frac{لا}{فر} = \left( \frac{لا^۱-۱}{فر^۱-۱} \right) = لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} + (۱-ن) \frac{لا^۱-۱}{فر^۱-۱}$$

$$یا لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (لا - \frac{فر}{فر^۱-۱}) (۱+ن) \frac{لا^۱-۱}{فر^۱-۱}$$

$$= (عف - ن) (۱+ن) \frac{لا^۱-۱}{فر^۱-۱}$$

اب ن کو بالتواتر ۲، ۳، ۴، ... کے مساوی رکھنے سے

$$لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (عف - ۱) لا \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (عف - ۱) عفا$$

$$لا^۲ \frac{فر^۲-۱}{فر^۲-۱} = (عف - ۲) لا^۲ \frac{فر^۲-۱}{فر^۲-۱} = (عف - ۲) (عف - ۱) عفا$$

اس لئے عام طور پر

$$لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = (عف - ن) (۱+ن) (عف - ۲) (۲+ن) ... (عف - ۱) عفا$$

یا ان عملوں کی ترتیب الٹنے سے

$$عفا (عف - ۱) (عف - ۲) ... (عف - ن) (۱+ن) لا$$

مثال - ذیل کی تفرقی مساوات کو حل کرو

$$لا^۳ \frac{فر^۳-۱}{فر^۳-۱} + لا^۲ \frac{فر^۲-۱}{فر^۲-۱} + لا^۱ \frac{فر^۱-۱}{فر^۱-۱} = لا^۳ + لا^۲ + لا^۱$$

رکھو لا = نو، اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$عفا (عف - ۱) (عف - ۲) + عفا (عف - ۱) + عفا = نو + نو + نو$$







# باب پنجم

## قائم مریات، متفرق مساواتیں

### قائم مری

۴۸۔ کاربیشری مساواتیں۔ مساوات ف (لا، ما، ا) =۔ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل لا اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہوتا جائے، دفعہ ۲ میں بتایا گیا ہے کہ لا ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ساقط ہو سکتا ہے

$$ف (لا، ما، ا) =۔$$

$$جف ف + \frac{جف ف}{جف ما} \times \frac{ف ما}{ف لا} =۔$$

$$فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط ف (لا، ما، ا) =۔$$

ہے پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔

اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو



قطع کرتا ہے اس نقطہ پر ان دو منحنیات کے تماس علی القوائم ہیں۔  
پس اگر اس نقطہ تقاطع کے رواں محدود بلحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے  
ضام، عا اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے  
اور اس کے لحاظ سے اس کے رواں محدود لا، ما ہوں تو

$$\text{ضا} = \text{لا}، \text{عا} = \text{ما}، \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} = \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{وہ (ضا، عا) = } \left( \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} \right) =$$

اور اس کو تکمیل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مرئیات کا قبیل حاصل ہوگا۔

اس لئے قاعدہ یہ ہے۔  
مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر  $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$  کی بجائے

$$\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}} \text{ لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔}$$

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محدودوں میں دی ہوئی ہو

تو وہ زاویہ جو سمتی نیم قطر تماس کے ساتھ بناتا ہے  $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$  ہوگا،

اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر  $\frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$  کی

$$\text{بجائے } \frac{1}{r} \text{ لکھ کر نئی تفرقی مساوات کو تکمیل کرو۔}$$

۵۰۔ دائروں کے قبیل  $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲ \text{ لا} \dots (۱)$   
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مرئیات



کا نظام معلوم کرو۔

$$\text{یہاں } لا + ما = \frac{ما}{لا} = ۱$$

اور ۱ کو ساقط کرنے سے  $لا^۲ + ما^۲ = ۲ لا (لا + ما) \frac{ما}{لا}$

$$\text{یعنی } لا^۲ + ۲ لا ما = \frac{ما}{لا} - ما^۲ = \dots \dots \dots (۲)$$

اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی

$$لا^۲ - ۲ لا ما = \frac{ما}{لا} - ما^۲ =$$

$$\text{یا } ما^۲ + ۲ لا ما = \frac{لا}{ما} - لا^۲ =$$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں  $ما = ۱$  و  $لا$  رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔

مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ 'لا' 'ما' کا باہم تبادلہ کر دیا گیا ہے اس لئے اس کا تکمیلی ہوگا

$$ما^۲ + لا^۲ = ۲ ما لا$$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور لا کو مبدأ پر مس کرتا ہے۔

$$\text{مثال ۲۔ منحنیات } \frac{لا}{لا + لہ} + \frac{ما}{ما + لہ} = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

کے قائم مرعیات کا نظام معلوم کرو جہاں لہ اس قبیل کا متبذل ہے۔

$$\text{یہاں } \frac{لا}{لا + لہ} + \frac{ما}{ما + لہ} = \dots \dots \dots (۲)$$

اور ان دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنا چاہئے۔



(۲) سے حاصل ہوتا ہے لا (ب<sup>۱</sup> + ل<sup>۱</sup>) + ما (ا<sup>۱</sup> + ل<sup>۱</sup>) =

$$\text{یا لہ} = \frac{\text{ب}^۱ \text{ لا} + \text{ا}^۱ \text{ ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

$$\text{پس ا} + \text{لہ} = \frac{(\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱) \text{ لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

$$\text{اور ب}^۱ + \text{لہ} = \frac{(\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱) \text{ ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$۱ = \frac{\text{لا}^۲ (\text{لا} + \text{ما})}{(\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱) \text{ لا}} - \frac{\text{ما}^۲ (\text{لا} + \text{ما})}{(\text{ا}^۱ - \text{ب}^۱) \text{ ما}}$$

$$\text{یا لا}^۲ - \text{ما}^۲ + \text{لا ما} (\frac{۱}{\text{ا}^۱} - \frac{۱}{\text{ب}^۱}) = \text{ا}^۱ - \text{ب}^۱ \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے ما کی بجائے  $\frac{۱}{\text{ما}}$  لکھنے سے مطلوبہ مریات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا}^۲ - \text{ما}^۲ + \text{لا ما} (\frac{۱}{\text{ا}^۱} + \frac{۱}{\text{ب}^۱}) = \text{ا}^۱ - \text{ب}^۱ \dots\dots\dots (۴)$$

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے اس لئے اس کا انگلی بھی وہی ہوگا

$$۱ = \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۱ + \text{ب}^۱} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ا}^۱ + \text{ب}^۱}$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم ماسکے ہیں۔

مثال ۳۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے صورتی خطوط کے قبیل

لہ = ۱ (۱۔ حجم طہ) کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔



یہاں  $\frac{r}{r} = 1$  جب طہ  
اور ۱ کو ساقل کرنے سے

$r = \frac{1}{\frac{1}{r}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{جم طہ}}} = \text{مس } \frac{1}{2}$   
اس لئے قائم مربیات کے قبیل کے لئے

$$- \frac{1}{r} = \frac{r}{\text{مس } \frac{1}{2}}$$

یا لوک ۱ = ۲ لوک جم طہ + مستقل

یا ۱ = ۲ (۱ + جم طہ)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قرون کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

### امثلہ

۱۔ ۱ کی مختلف قیمتوں کے لئے مکافیات  $1^2 = 2$  ۱ لا کے قائم مربیات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ ۱ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متشابہ ناقصوں کے

قبیل  $\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} = 1$  کے قائم مربیات کا نظام  
 $1^2 = 2$  ۱ م ۱ ہے۔

۳۔ ۱ کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لولبیوں

کے قبیل ۱ = ۱ و ۱ م ۱ کے قائم مربیات معلوم کرو۔

۴۔ ۱ کی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسکہ مکافیوں

$\frac{1}{r} = 1 + \text{جم طہ}$  کے قائم مربیات کا قبیل معلوم کرو۔



۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ لا ما = ۱ \\ ۳ لا ما - ۲ ما = ب \end{array} \right.$$

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات رجباً عہ = ۱ (جم طہ - جم عہ)

اور رجباً یہ = ۱ (جنربہ - جم طہ)

علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر ف (لا + خ ما) = می + خ و تو ثابت کرو کہ

$$می = ۱ اور و = ب$$

قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل

قبیل مہ منر لا - قمر لا جم ما = مستقل کے منحنیات کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔  
[نٹن ۱۸۹۰ء]

## علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

۵۔ مساوات  $\frac{فری}{فرط} + می = ف (ی)$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

۲  $\frac{فری}{فرط}$  کے ساتھ ضرب دینے اور تکمیل کرنے سے

$$\left( \frac{فری}{فرط} \right) + می = ۲ ف (ی) + ۱$$



جسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں  $\int$   $\frac{دری}{۲ + ۱(دری) - ۱(ی) = طہ + ب}$   
 اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲۔  $\frac{دری}{در طہ} + ن ا ی = ف (طہ)$  مستقل سروں والی  
 ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے  
 ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔  
 جب ن طہ کے ساتھ ضرب دو جو مشکل جزو ضربی ہے  
 تکمیل کرنے سے

جب ن طہ  $\frac{دری}{در طہ} - ن ی$  جم ن طہ =  $ف (طہ)$  جب ن طہ  $\frac{دری}{در طہ} +$   
 اسی طرح جم ن طہ مستعمل جزو ضربی ہے اور اس کے جواب  
 میں پہلا تکمیلی

جم ن طہ  $\frac{دری}{در طہ} + ن ی$  جب ن طہ =  $ف (طہ)$  جم ن طہ  $\frac{دری}{در طہ} + ب$   
 $\frac{دری}{در طہ}$  کو ساقط کرنے سے

ن ی =  $ف (طہ)$  جب ن (طہ - طہ)  $\frac{دری}{در طہ} + ب$  جب ن طہ

۵۳۔ ایک ایسے جسم کی مساوات حرکت جس کی کمیت بدلتی ہو  
 اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$\frac{دری}{درت} = ف (لا) \frac{در لا}{درت} = سا (لا)$



اور اس کا مکمل جزو ضربی فہ (لا) فرٹ ہے۔

کیونکہ فہ (لا) فرٹ فرٹ {فہ (لا) فرٹ} = ساد (لا) فہ (لا) فرٹ  
جس سے حاصل ہوتا ہے  $\frac{1}{f} = \{فہ (لا) فرٹ\} = ساد (لا) فہ (لا) فرٹ$

$$یا \frac{1}{f} = \frac{فہ (لا) فرٹ}{ساد (لا) فہ (لا) فرٹ + 1} = فرٹ$$

متغیر جدا ہو گئے ہیں پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

### مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی معیاری صورت میں تحویل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔} \quad \frac{فرما}{فرلا} = ف (لا + ب م)$$

فرض کرو کہ  $لا + ب م = ی$

$$تب \quad لا + ب م = \frac{فرما}{فرلا}$$

$$پس \quad لا + ب م (دی) = \frac{فری}{فرلا}$$

$$اور \quad فرلا = \frac{فری}{لا + ب م (دی)}$$

$$یا لا + ج = \frac{فری}{لا + ب م (دی)}$$



مثال ۲۔  $لا^۲ - \frac{ما^۲}{حرا} (ما + لا حرا) = ۱$ ۔  
رکھو لا ما = ی

تب  $ما + لا = \frac{حرا}{حری}$

$لا (لا - \frac{حری}{حرا} ما) = ۱$

یا  $ی = لا + \frac{حری}{حرا}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے  
 $لا ما = لا ج + \frac{۱}{ج}$

مثال ۳۔  $فوا^۲ (لا + ما) = (۱ - \frac{حرا}{حری}) فوا^۲ + فوا^۲ = ۱$  کو حل کرو

فرض کرو کہ  $فوا = عا$  اور  $فولا = ضا$   
اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$(فوا - \frac{حرا}{حری}) = ۱ + \frac{فوا}{فولا}$

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$عا - ضا = \frac{حرا}{حری} + ۱$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

$عا = ج ضا + ۱ + ج$

یا  $فوا = ج فولا + ۱ + ج$



مثال ۴۔  $\overline{لا\ ما} = \left(\frac{\overline{لا}}{1}\right) + (\overline{لا} - \overline{لا\ ما} - \overline{ب}) \frac{\overline{لا}}{1} - \overline{لا\ ما} =$

(ہندسہ محجمات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو  $\overline{لا} = \overline{لا\ سی}$  اور  $\overline{لا\ ما} = \overline{لا\ ت}$

مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$\overline{لا\ سی\ ت} = \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}\right) + (\overline{سی} - \overline{لا\ ت} - \overline{ب}) \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}\right) - \overline{لا\ سی\ ت} =$

یا  $\overline{لا\ سی} = \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}\right) + (\overline{سی} - \overline{لا\ ت} - \overline{ب}) \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} - \overline{لا\ سی\ ت} =$

یعنی  $\overline{لا\ سی\ ت} = \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} + 1\right) \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} - \left(\frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} + 1\right) \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1} =$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $\overline{لا\ سی} = \overline{لا\ ت} - \overline{ب} \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1 + \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}}$

جو کلیروی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

$\overline{لا\ سی} = \overline{لا\ ت} - \overline{ب} \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1 + \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}}$

یا  $\overline{لا\ سی} - \overline{لا\ ت} = -\overline{ب} \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1 + \frac{\overline{لا\ سی\ ت}}{1}}$

اس کا تادر حل ہے  $\overline{لا} = \overline{لا\ ت} - \overline{لا\ ما} = \overline{لا\ ت} - \overline{لا\ ب}$

جو چار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵۔  $\overline{لا\ ما} = \left(\frac{\overline{لا\ ما}}{1}\right) + \left(\frac{\overline{لا\ ما}}{1} + 1\right) \frac{\overline{لا\ ما}}{1} - \overline{لا\ ما} =$  کو حل کرو



فرض کرو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\frac{م^2}{17 + 14\lambda} = ق$$

اس طرح لا سیدھے تکمل سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہو سکتا ہے

$$اب \quad \frac{\frac{م^2}{ق}}{17 + 14\lambda} = \frac{م^2}{ق}$$

$$اور \quad \frac{م^2}{ق} = \frac{م^2}{ق} - \frac{م^2}{ق(17 + 14\lambda)}$$

$$پس (17 + 14\lambda) \frac{م^2}{ق} = \frac{م^2}{ق} - \frac{م^2}{ق} \times \frac{14\lambda}{17 + 14\lambda}$$

$$پس مساوات معلوم اس طرح کی مساوات  $\frac{م^2}{ق} + \frac{م^2}{ق} = 0$$$

میں تحویل ہو جاتی ہے جس کا حل ہے

$$م = 0 \text{ جب } ق = 0 + 17 + 14\lambda$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم حاصل ہوتا ہے۔

[ اگر مثبت ہو تو

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{17 + 14\lambda}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{17 + 14\lambda}$$

$$اگر منفی ہو تو \quad \frac{1}{17} = \frac{1}{17 - 14\lambda}$$



یعنی  $\frac{1}{x-1}$  جب  $(x-1) = t$  [ مثال ۶۔ ذیل کی ہمزاد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سروں والی خطی مساواتیں ہیں) ]

$$۴ = \frac{۴}{x-1} + \frac{۹}{x-۲} + ۳۴ + ۶۹ = t$$

$$۳ = \frac{۳}{x-1} + \frac{۷}{x-۲} + ۳۴ + ۳۸ = t$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، عف ، عف کی بجائے لکھا گیا ہے

$$۴ = t(۱۱ + عف) + ۳۴ + ۶۹$$

$$۳ = t(۳۴ + عف) + ۳۸ + ۷$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۷ اور ۶ عف + ۳۴ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ماکو ساقط کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے،

$$[۴(۳۴ + عف) - ۳(۱۱ + عف)] = ۳۸ + ۷ - ۶۹ - ۳۴$$

$$۵۸ - ۳۸ = ۷ - ۳۴$$

$$یا (۷ + عف) = ۲۶ = ۳۸ - ۵۸$$

$$جس سے ملتا ہے  $\frac{۱}{x-1} = \frac{۲۶}{x-1} + \frac{۷}{x-۲} + ۳۴ + ۶۹$$$

$$یا  $\frac{۱}{x-1} = \frac{۲۶}{x-1} + \frac{۷}{x-۲} + ۳۴ + ۶۹$$$

ماکو حاصل کرنے کے لئے ہم  $\frac{۱}{x-1}$  کو اصلی مساواتوں سے ساقط



کہتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۲ لا = ۷ ت - ۹ ق$$

$$\text{پس } ۷ ت = ۷ ت - ۹ ق - ۲ لا - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$$

$$= ۷ ت - ۹ ق - ۲ (۱ ق + ۲ ب + ۳ ت) + \frac{۱۹ ت - ۵۶ ق - ۲۹ ق}{۷}$$

$$= (۷ ت - ۹ ق - ۲ ق - ۴ ب - ۶ ت) + \frac{۱۹ ت - ۵۶ ق - ۲۹ ق}{۷}$$

$$= -۱ ق - ۴ ب - ۶ ت + \frac{۱۹ ت - ۵۶ ق - ۲۹ ق}{۷}$$

$$\text{پس } لا = ۱ ق + ۲ ب + ۳ ت + \frac{۱۹ ت - ۵۶ ق - ۲۹ ق}{۷}$$

$$۷ لا = ۷ ق + ۱۴ ب + ۲۱ ت + ۱۹ ت - ۵۶ ق - ۲۹ ق$$

[طالب علم فرما کے اسقاط کا بغور ملاحظہ کرے، اس طرح زیادہ

مستقلات کو شریک کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی]

مثال ۷۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو حل کرو

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + ۳ = ۱۶ لا -$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} - ۵ = ۹ ت -$$

یہ مساواتیں اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہیں



$$(عفا + ۱۶) لا + ۳ عفا = ما$$

$$- ۵ عفا لا + (عفا + ۹) ما =$$

ان مساواتوں پر بالترتیب عفا + ۹ اور ۳ عفا کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$[ (عفا + ۱۶) لا + ۳ عفا + (عفا + ۹) ما ] - ۵ عفا لا =$$

$$یا (عفا + ۳۰ عفا + ۱۴۴) لا =$$

$$یعنی (عفا + ۴) (عفا + ۳۶) لا =$$

جس سے لا = ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ج جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت  
ما کے تفرقی سروں کو ساقط کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفریق کرو  
اور دوسری کے ساتھ چند کو اس سے تفریق کرو اس طرح ملیگا

$$\frac{۳۱}{۲۷} = \frac{۳۱}{۲۷} لا + \frac{۳۱}{۲۷} لا$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے (بغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے)

$$ما = ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ج جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت$$

## امثلہ

$$۱- ۲ لا ما - \frac{۳۱}{۲۷} ما = (۱- لا) ما = لا$$

$$۲- ۲ قطا ما - \frac{۳۱}{۲۷} ما + ۲ جب ۲ ت = \frac{۳۱}{۲۷} ما + مس ما = لا$$

$$۳- (۱+ ب لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما + (۱+ ب لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما + ب ما = لا$$

$$۴- (۱+ لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما + ۲ لا (۱+ لا) \frac{۳۱}{۲۷} ما = ما$$



$$۵ - (۱ - لا^۲) \frac{ما^۲}{ولا^۲} - لا \frac{ما}{ولا} + ن^۲ ما = .$$

$$۶ - \frac{ما}{ولا} = ولا - ما (ولا - ن^۲ ما)$$

$$۷ - \frac{ما}{ولا} = ۲ جب \frac{لا - ما}{۲} جم \frac{لا + ما}{۲} جم لا \frac{جم لا}{جم ما}$$

۸ - ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکلی حاصل کرو

$$(۱) \frac{ما^۳}{ولا^۳} - ۳ \frac{ما^۲}{ولا^۲} + ۹ \frac{ما}{ولا} + ۱۳ ما = .$$

$$(ب) \frac{ما^۲}{ولا^۲} + ۶ \frac{ما}{ولا} + ۹ ما = ۲۵ جم لا$$

$$(ج) لا^۲ \frac{ما^۲}{ولا^۲} - ۵ لا \frac{ما}{ولا} + ۱۰ ما = . [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۹ - ذیل کی ہمزاو مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{ما^۲}{ولا^۲} + ۱۵ ما + ۳ ی = ۲۰ = .$$

$$\frac{ما^۲ ی}{ولا^۲} + ۲ ما + ۱۰ ی + ۴ = ۰ [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۱۰ - اس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اس نقطہ کے محدودوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱ - ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحناء ایسے بدلتا ہے جیسے اس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲ - جس منحنی میں انحناء کے نصف قطر کا ظل محور ما پر مستقل ہو



اس کے لئے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad s \infty \text{ لوک مس } \left( \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} \right)$$

$$(2) \quad m \infty \text{ لوک قط } \frac{\pi}{n}$$

نوٹ۔ (۱) میں  $s$  قوس کا طول ہے اور  $m$  محاس کا

میلان ہے محور کا کے ساتھ۔





# جوابات

صفحہ (۶)

$$۱۔ لا مس لا۔ لوک قط لا = ماس ما۔ لوک قط ما + ج$$

$$۲۔ \frac{لا۔ ما}{۳} + \frac{لا۔ ما}{۲} + لا۔ ما = ج$$

$$۳۔ لا ما + لا + ما + ج (لا + ما + ا) = ا$$

$$۵۔ لوک [ا + ما] = لوک لا + مس لا + ج$$

$$۶۔ ۲ (و۔ و) = لا + ج$$

$$۹۔ (۱) ما = ج و (۲) ما = لا + ج$$

$$(۳) ر (ج۔ ط) = ا (۴) ر = ا ط + ج$$

$$۱۰۔ لا = لا۔ ما + \frac{۱}{۲} لوک \frac{۱ - [لا۔ ما]}{[لا۔ ما] + ۱} اگر ما = ا جبکہ لا =۔$$

صفحہ (۱۱)

مس لا ۲ مس لا

$$۱۔ ۲ ما و = و + ج$$

$$۲۔ (و + با) ما = ا جب با لا۔ با جم با لا + ج و لا$$



$$۳ - رط = ۱ + \frac{ط + ۲}{۲ + ۵} ج$$

$$۴ - م لا م = م + ج \quad ۵ - لا و مس = مس + م + ج$$

$$۶ - م و لا = لا + ج \quad ۸ - لا + م + لا + لا = ج + و = \frac{۲}{۳}$$

$$۹ - لا م = \frac{۱}{لا + ج} \quad ۱۰ - (لا م) = \frac{۱}{لا + ج} = \frac{۱}{۲ + ۳ - ۱}$$

$$۱۱ - م + ج = \frac{۱}{۱ - ۵} (۱ - ۵) \quad ۱۲ - لا جب م = \frac{۱}{۲ + ج}$$

$$۱۳ - لا لوکی = \frac{۱}{۲ + ج} \quad ۱۴ - و = \frac{۱}{۲ + ج} = \frac{۱}{۲ + ۱ - ۵} (۱ - ۵)$$

$$۱۵ - ر = \frac{۱}{ر + ج} \quad ۱۶ - ر = \frac{۱}{ر + ج} = \frac{۱}{۱ - ۵} (۱ - ۵)$$

$$۱۸ - (۱) \frac{۱}{لا} = ج + (۲) (و + ب) = و = لا جب ب لا جب لا جب و$$

$$(۳) جب م = و + ج \quad (۴) ف (م) + ف (لا) + ج = ۱ + و (لا)$$

صفحہ (۱۷)

$$۱ - \frac{۱}{۲} لوک (و + و + ۱) + \frac{۱}{۲} لوک + \frac{۲ + ۱ - ۱}{۲ + ۱ + ۱} لوک لا = ج چاں و = \frac{۱}{۲}$$

$$۲ - \frac{۱}{۲} لوک (و + و + ۳) + \frac{۹}{۲} لوک + \frac{۱۲ + ۱ - ۱}{۲ + ۱ + ۱} لوک لا = ج$$



$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad 4 - 2 = 2 \quad \text{ع حاصل اسقاطا} = (1 + 2) = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اور لا} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

۵ - ع حاصل اسقاط ذیل کی مساواتوں کا

$$1 = (1 + 2 + 3) = 6$$

اور لوک لا  $\{ 1 + 2 + 3 \}$

$$+ \frac{2}{1 + 2 + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

صفحہ (۲۰)

$$1 - (1 + 2) = 1 - 3 = -2 \quad 2 - (1 + 2) = 2 - 3 = -1$$

$$3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad 4 - 2 = 2 \quad \text{لوک } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$+ \text{لوک } (1 - 2) = -1$$

$$4 - (1 + 2) = 1 \quad 5 - (1 + 2) = 2 \quad 6 - (1 + 2) = 3$$

$$5 - 1 = 4 \quad 6 - 2 = 4 \quad 7 - 3 = 4$$

$$8 - 4 = 4 \quad 9 - 5 = 4 \quad 10 - 6 = 4$$

$$11 - 7 = 4 \quad 12 - 8 = 4 \quad 13 - 9 = 4$$

$$14 - 10 = 4 \quad 15 - 11 = 4 \quad 16 - 12 = 4$$



صفحہ (۲۵)

$$۱۔ م + ۱ = ج \quad ۲۔ م = ۱ + \frac{۲}{۲} + لوک لا + ج$$

$$۳۔ م + \frac{۲}{۲} (۱ + لا) - \frac{۳}{۲} (۱ + لا) = ج$$

$$۴۔ لا (۱ + لا) = ج \quad ۵۔ م + ۱ = ج + \frac{۳}{۲} لوک (۱ + لا) + ج$$

$$۶۔ جم = \left\{ \frac{۱ - (۱ - لا)^۲ - ۱}{لا - ۱} \right\} = ۱ - لا$$

$$۷۔ لا = \frac{۳}{۲} + ۱ + ۲ + ۳ + ج + ۴$$

$$۸۔ م = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ج + ۵$$

$$۹۔ لا = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ج + ۶$$

صفحہ (۲۸)

$$۱۔ م = ج + لا + ۱$$

$$۲۔ م = ج + لا + ۲$$

$$۳۔ م = ج + لا + ۳$$



$$۴ - م = ج لا + لا ج + ج ب ، \frac{لا}{ب} + \frac{م}{ب} = ۱$$

$$۵ - م = (لا - ج) ج - ج ، (لا - ج) م = م$$

$$۶ - (م - ج لا) (ج - ۱) = ج ، م لا + لا م = ۱$$

صفحہ (۳۰۱)

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - م = ع لا + لا ع \\ لا = \frac{لوک ع - ع + ج}{۲(۱ - ع)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} ۲ - م = ج لا + لا ع \\ لا = \frac{ع}{۲-۱} + ج \frac{ع}{۲-۱} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۳ - م = ع لا + لا ع \\ لا (۱ - ع) = ع - ع + ع + ج \\ ۴ - م = (ع + لا) (ع + لا) + لا \\ ع لا = ۱ + ۱ + لوک ع \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۵ - م = (ع + ع) لا + لا ع \\ ع لا = (۱ - ن) + ۱ + لوک ع (۱ - ن) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۶ - م = ع لا + لا ع \\ ع لا = ۱ + ۱ + ع \frac{ن}{۱ + ن} \end{array} \right.$$







$$۵ - (لا - ا) + (ما - ب) = ر \quad ۶ - لا + ب = س \quad \frac{ر}{\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - \frac{۱}{۲}}$$

$$۷ - ما + ب = س \quad \frac{س}{\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - \frac{۱}{۲}} = لا$$

$$۸ - \frac{ب}{لا} = س \quad \left( \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ما} \right) \frac{س}{۲} = لا + ب$$

$$۹ - ما = ب \quad \frac{لا + ما + ۱}{ب}$$

$$۱۰ - لا + ا + \frac{ما - ۱}{ما} + جب = ما$$

$$۱۱ - ما = ب \quad لا - ا = لا + ب$$

صفحہ (۴۲)

$$۱ - لا = ما = ق + ا + لا + ب + ج$$

$$۲ - (لا + جب) = ما = جم + لا + ا + لا + ب + ج$$

$$۳ - (ا) لا = ۳ لا + ۲ لا + ۱ لا + (۶ - لا) = ما = ق + ا$$

$$(ب) لا = ما - ب = \frac{ما}{لا} + ا + ق$$

$$(ج) لا = ما - ۴ لا + ۱ لا + ۱ لا - ۴ لا + ۱ لا + ۱ لا - ۶ لا = ۶$$

$$+ \frac{۱}{۲} (لا + ما) = لا (لوک لا - ۱) + ا$$



## صفحہ (۵۵)

اس نمبری کے جوابات میں ا، ب، کج وغیرہ اختیاری مستقل ہیں۔

$$۱-۱ = ا + و + ب + و = ۱۰۰ \quad ۲-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۳-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۴-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۵-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۶-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۷-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۸-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۹-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۱۰-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۱۱-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۱۲-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۱۳-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۱۴-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۱۵-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۱۶-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۱۷-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۱۸-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۱۹-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰ \quad ۲۰-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$

$$۲۱-۱ = ا + و + ب + و + ج + و = ۱۰۰$$



۱۲- م = (ا + ب لا) جب لا + (ج + د لا) جم لا + ع جب ب لا  
 + ف جم ب لا + گ و  $\frac{\text{ج لا}}{۲}$  جب ج لا +  $\frac{\text{ج لا}}{۲}$  جم ج لا +  
 + ه و  $\frac{\text{ج لا}}{۲}$  جب ج لا +  $\frac{\text{ج لا}}{۲}$  جم ج لا +

صفحہ (۵۹)

$$\frac{x}{120} + \frac{x}{120} \quad (3) \quad \frac{x}{(2+1)(1+1)} \quad (2) \quad \frac{x}{4} \quad (1) = 1$$

صفو (۶۲)

۶۰۔ واجب لا، لا مؤ لوک (لا مؤ)

صفحہ (۶۳)

۱۔  $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{4}c$  (ب لـ س  $\frac{1}{2}$  ب)

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \text{جم (۲ لا - ۵ ستار)}$$

$$\frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \text{جیب} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) - \frac{1}{\sqrt{a}} \text{جیب} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\}$$

¼ (جب لا جنرلا - جم لا جنرلا)



$$۲ - \frac{1}{4} \text{ جب } ۲ \text{ لا } \frac{1}{4} \text{ جم لا } - \frac{3}{16} \text{ جب } ۲ \text{ لا}$$

صفحہ (۶۵)

$$\frac{\text{قو (جب لا جم لا) قو لا } ۴ \text{ و (و-۱) جب لا } + (۱-۲+۱) \text{ جم لا}}{\text{و (و+۱)}}$$

۲- جم لا جز لا

صفحہ (۶۶)

$$۱ - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{ لا } + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \text{ لا } + \frac{1}{4} \text{ لا}$$

$$۲ - \text{قو } \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{ لا } + \frac{19}{108} \right) \text{ قو } \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{ لا } \right) + \text{قو } \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right)$$

$$۳ - \frac{1}{4} \text{ قو (لا جب لا جم لا) - قو } \left( \frac{3}{5} + \text{لا} \right) \text{ جم لا - (لا + } \frac{4}{5} \text{) جب لا}$$

صفحہ (۷۲)

$$۱ - (۱) - \frac{1}{2} \text{ لا جم لا } (۲) \frac{1}{4} \text{ لا جب لا } (۳) \frac{1}{2} \text{ لا جز لا}$$

$$(۴) \text{ قو } \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{ لا } \right) (۵) \frac{1}{2} \text{ لا قو } (۶) \frac{1}{4} \text{ لا (جز لا + جم لا)}$$

$$(۷) \frac{1}{4} \text{ لا (و-و-ب) } \left( \frac{1}{2} \text{ قو } + \frac{1}{2} \text{ قو } - \frac{1}{2} \text{ قو } \right) (۸) \frac{1}{4} \text{ لا جب لا جب لا}$$

$$۲ - (۱) = ۶ = ۱ \text{ قو } + ۱ \text{ قو } + ۱ \text{ قو } + \frac{1}{4} \text{ قو لا}$$







$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{32} \text{ لا } \frac{1}{32} \text{ جب لا } + \frac{\text{لا}^2 \text{ قو}}{8} + \text{لا} + 2$$

صفحہ (۷۵)

$$\begin{aligned} 1 - \text{ما} &= \text{جب (ق لوک لا)} + \text{پ جم (ق لوک لا)} \\ 2 - \text{ما} &= \text{جب (ق لوک لا)} + \text{پ جم (ق لوک لا)} + \frac{\text{ق}^2}{2} - \frac{\text{ق}^2}{2} \text{ (لوک لا)} \\ &+ \frac{\text{ق جب (لوک لا)} - 2 \text{ جم (لوک لا)}}{\text{ق} + 2} - \frac{\text{لوک لا جم (ق لوک لا)}}{2 \text{ ق}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 - \text{ما} &= \frac{1}{4} + \text{پ لا جب (لوک لا)} + \text{پ لا جم (لوک لا)} \\ &+ \frac{\text{لا}}{4} + \text{لوک لا} \end{aligned}$$

$$4 - \text{ما} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ لا لوک لا} + \frac{\text{لا (لوک لا)}}{4} + \frac{\text{لا}}{16}$$

$$5 - \text{ما} = \text{جب } \left\{ \frac{\text{ق}}{\text{پ}} \text{ لوک (لا + ب لا)} \right\} + \text{پ جم } \left\{ \frac{\text{ق}}{\text{پ}} \text{ لوک (لا + ب لا)} \right\}$$

صفحہ (۸۶)

$$1 - \text{لا}^2 + \text{ما} = \text{ب} \quad 3 - \text{ر} = \text{ب و} \quad \text{طہ مس عہ} \quad 4 - \text{ر} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ر}} = 1 - \text{جم طہ}$$

صفحہ (۸۹)

$$1 - \text{رکھو ما} = \text{لا ہی، ما} = \text{لا}^2 - 2 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + \text{ج لا قو}^2$$

$$2 - \text{رکھو مس ما} = \text{مس ما} = \text{جم لا} + \text{ب جب لا} + \text{لا}$$



۳۔ رکھو  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$  'ما' = ج  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$  'د'  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$  'لا'  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$

$$= \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}} + \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}}$$

جہاں 'م'، 'م' مساوات 'ب' 'م' +  $(\frac{1}{b} - \frac{1}{b})$  'م' + 'ب' =  
کی اصلیں ہیں۔

۴۔ رکھو 'ی' = سن 'لا' 'ما' =  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$  /  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$

۵۔ رکھو 'ی' = جب 'لا' 'ما' =  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$  'ن' جب 'لا'  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$

+ 'ب' جم 'ن' جب 'لا'  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$

۶۔ رکھو 'و' = ضا' 'و' = عا'  $(\frac{1}{b} - \frac{1}{b})$  'و' =  $\frac{1}{b}$

۷۔ رکھو جب 'لا' = ضا' جب 'ما' = عا'  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$  'و' =  $\frac{1}{b}$

۸۔  $(\frac{1}{b})$  'ما' =  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'و' جب  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'ج'  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'جم'  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$

'ب'  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$  'و'  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'جم'  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'ب' جب  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$

'ج' 'ما' =  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'لوک' 'لا' + 'ب' 'لا' 'جم' 'لوک' 'لا'

۹۔  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'ج' جب  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'د' 'جم'  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$

'ی' =  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'ج' جب  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'لا' +  $(\frac{1}{b} + \frac{1}{b})$  'جم'  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$

۱۰۔ 'ما' =  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$  'ک' 'لا'  $\frac{1}{b} + \frac{1}{b}$

—————



# فہرست اصطلاحات

|                                |                          |
|--------------------------------|--------------------------|
| Canonical form                 | صورت آئینی               |
| Clairaut's form                | کلیروی صورت              |
| Commutative law                | قانون مبادلہ             |
| Complementary Function         | مستقیم تفاعل             |
| Complete primitive             | کامل ابتدائی             |
| Distributive law               | قانون تقسیمی             |
| Elimination                    | استقاط                   |
| "Exact" Differential Equations | "بھیک" یا حاضر مساواتیں  |
| Homogeneous Equations          | متجانس مساواتیں          |
| Index law                      | قانون قوت نما            |
| Irreversible process           | غیر انقلاب پذیر عمل      |
| Linear Equations               | خطی مساواتیں             |
| Operator                       | عامل                     |
| Order                          | رتبہ                     |
| Orthogonal trajectory          | قائم مرقی                |
| Particular integral            | خاص تکمیلی               |
| Rigid Dynamics                 | استوار اجسام کا علم حرکت |
| Singular Solution              | تناور حل                 |



## تفریقہ

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ect}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \text{ وغیرہ}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

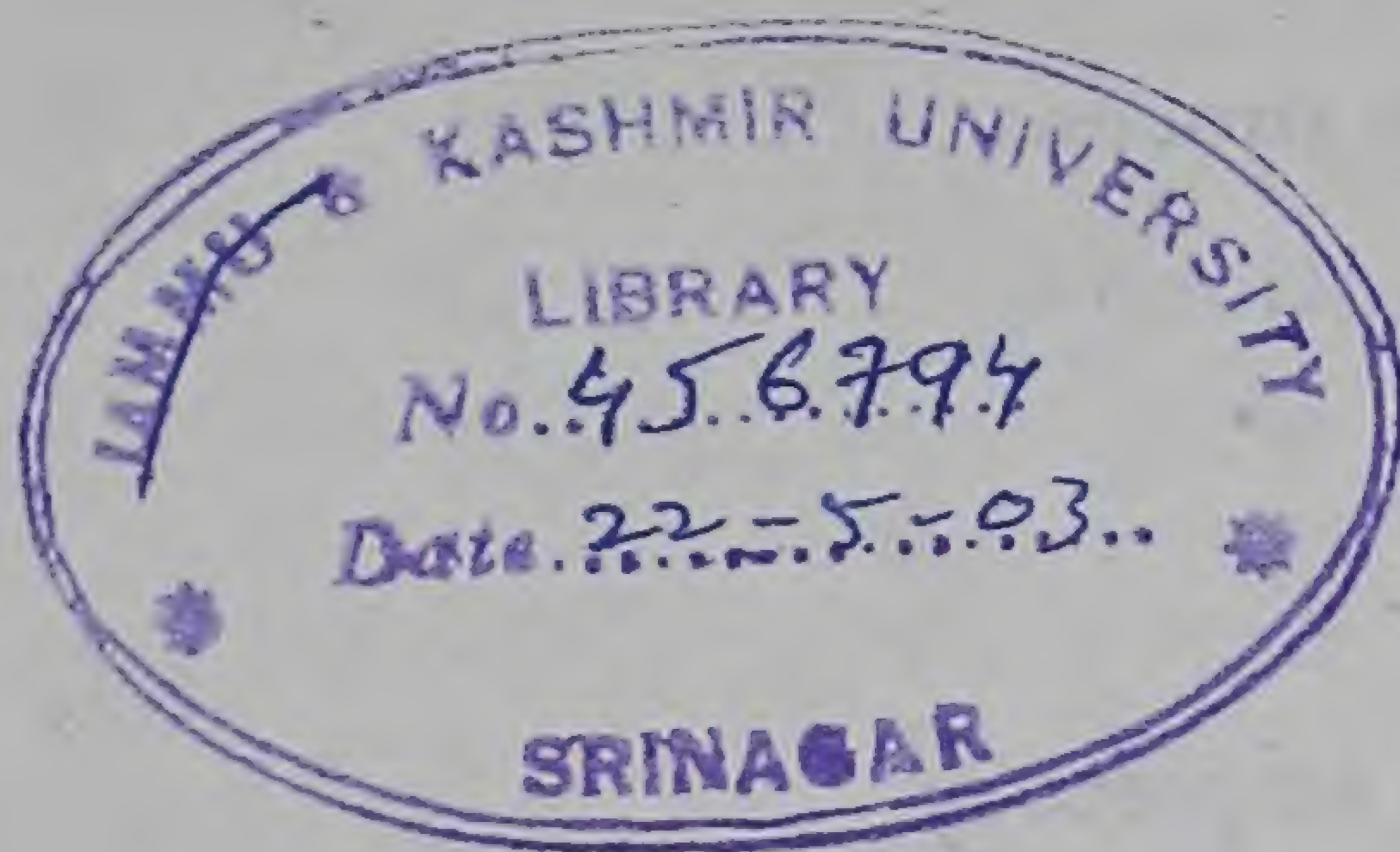
$$\frac{dy}{dx}$$

$$\int f(x) dx$$

$$\int f(x) dx$$

$$D \left( \frac{d}{dx} \right)$$

$$D \left( \frac{d}{dx} \right)$$























**ALLAMA  
IQBAL LIBRARY**

**UNIVERSITY OF KASHMIR  
HELP TO KEEP THIS BOOK  
FRESH AND CLEAN**